6 Planimetrie

> Opravdovým matematikem může být pouze ten, kdo se o matematiku zajímá zcela nezištně (Euklides)

6.1 Úhel

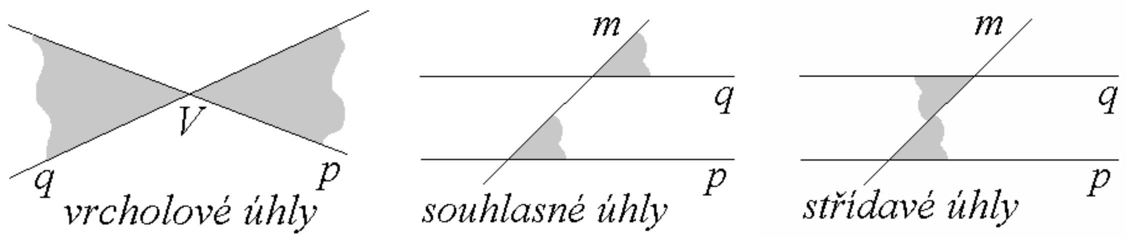
V kapitole 1.4 jsme zopakovali některé základní množiny bodů – geometrické útvary: bod, přímka rovina, polopřímka, polorovina, úhel a jeho velikost, trojúhelník, kružnice a kruhový oblouk. V kapitole 5.7 jsme tyto poznatky doplnili o obloukovou míru úhlů. Výsledky těchto předběžných úvah využijeme nyní k soustavnějšímu zopakování geometrických poznatků. V této kapitole se budeme zabývat geometrií v rovině – **planimetrií**, v kapitole následující pak geometrií v prostoru – **stereometrií**.

Zopakujme, že **úhlem** rozumíme buď průnik dvou polorovin s různoběžnými hraničními přímkami (**konvexní úhel**) nebo jejich sjednocení (**nekonvexní úhel**).

Dále budeme potřebovat následující pojmy:

Vrcholové úhly: Dvě různoběžky p, q se společným bodem V rozdělí rovinu na čtyři úhly – dvě dvojice úhlů jejichž ramena jsou opačné polopřímky. Takové úhly nazýváme úhly vrcholové. **Vrcholové úhly jsou shodné**.

Úhly souhlasné a střídavé: Mějme tři přímky: $p \parallel q$; $m \times p$. Souhlasnými úhly rozumíme úhly ležící v téže polorovině s hraniční přímkou m, přičemž oba jsou zároveň ostré nebo tupé. Střídavými úhly rozumíme úhly ležící v opačných polorovinách s hraniční přímkou m, přičemž jsou oba zároveň ostré nebo oba zároveň tupé. **Souhlasné úhly jsou shodné**. **Střídavé úhly jsou shodné**.



Souhlasné a střídavé úhly lze definovat obecně i mezi přímkami, které rovnoběžné nejsou. Definice je formálně poněkud složitější, proto ji jen naznačíme: souhlasnými úhly rozumíme úhly, které leží na „stejné straně přímky m" (tj. současně vlevo nebo současně vpravo) a na „stejných stranách přímek p, q" (tj. současně nahoře nebo dole). Přímky p, q pak nemusí být rovnoběžné a souhlasné úhly nemusí být shodné (podobně pro úhly střídavé). Výše uvedené věty bychom pak mohli formulovat ve tvaru implikace, např::

Jestliže jsou přímky p, q rovnoběžné, pak souhlasné (střídavé) úhly jsou shodné.

Pro takto definované souhlasné a střídavé úhly platí i věta obrácená:

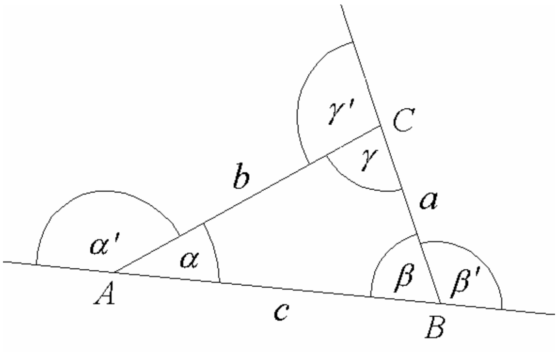
Jestliže jsou souhlasné (střídavé) úhly shodné, pak jsou přímky p, q rovnoběžné.

Větu tedy můžeme vyslovit ve tvaru ekvivalence:

Souhlasné (střídavé) úhly jsou shodné právě tehdy, když jsou přímky p, q rovnoběžné.

6. 2 Trojúhelník

Trojúhelníkem ABC (označíme ΔABC) rozumíme průnik polorovin



$$\Delta ABC = \overrightarrow{ABC} \cap \overrightarrow{ACB} \cap \overrightarrow{CBA},$$

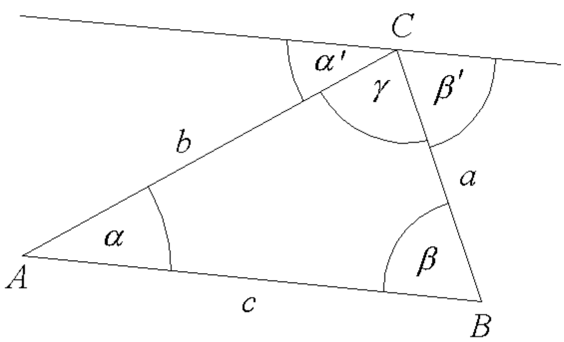
kde $A; B; C$ jsou navzájem různé body, které neleží na jedné přímce. Nazýváme je **vrcholy** trojúhelníka. Spojnice vrcholů nazýváme strany trojúhelníka a značíme malými písmeny ($AB = c$; $BC = a$; $AC = b$).

Malá písmena lze tak chápat v podstatě trojím způsobem:

a) jako označení **přímky**, na které leží dva vrcholy,
b) jako označení **strany** trojúhelníka (tj. označení úsečky),
c) jako **velikost** příslušné strany.

Konkrétní význam bývá vždy zřejmý ze souvislostí.

Sjednocení stran trojúhelníka nazýváme **obvodem** trojúhelníka. Konvexní úhly $\alpha = \sphericalangle BAC$; $\beta = \sphericalangle ABC$; $\gamma = \sphericalangle ACB$ jsou **vnitřní úhly** trojúhelníka, úhly k nim doplňkové jsou pak **vnější úhly** trojúhelníka.



Součet vnitřních úhlů trojúhelníka: V ΔABC veďme např. vrcholem C rovnoběžku se stranou c a označme $\alpha'; \beta'$ úhly dle připojeného obrázku. Je $\alpha' + \beta' + \gamma = 180^0$. Protože však $\alpha' = \alpha$; $\beta' = \beta$ (střídavé úhly), je

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0.$$

Součet vnějších úhlů trojúhelníka: V ΔABC označme $\alpha'; \beta'; \gamma'$ vnější úhly. Je tedy

$$\alpha' = 180^0 - \alpha;\ \beta' = 180^0 - \beta;\ \gamma' = 180^0 - \gamma,$$

tj,:

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = (180^0 - \alpha) + (180^0 - \beta) + (180^0 - \gamma)$$
$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 540^0 - (\alpha + \beta + \gamma)$$
$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 540^0 - 180^0$$
$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^0.$$

Trojúhelníky dělíme: podle délek stran na
- různostranné
- rovnoramenné
- rovnostranné,

podle velikosti vnitřních úhlů na
- tupoúhlé
- pravoúhlé
- ostroúhlé.

Trojúhelníková nerovnost:

Součet délek libovolných dvou stran trojúhelníka je vždy větší než délka třetí strany.
Rozdíl délek libovolných dvou stran trojúhelníka je vždy menší než délka třetí strany.
Proti větší straně trojúhelníka leží větší vnitřní úhel.

Proti menší straně trojúhelníka leží menší vnitřní úhel.
Proti shodným stranám trojúhelníka leží shodné vnitřní úhly.

Shodnost trojúhelníků: Trojúhelníky stejně jako jiné útvary jsou shodné právě tehdy, lze-li jeden na druhý přemístit tak, že splynou. V případě trojúhelníků to znamená, že musí mít shodné všechny strany a všechny úhly. Zapisujeme $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$. Vrcholy trojúhelníka v tomto zápisu je třeba chápat jako **uspořádané** trojice. Tento zápis totiž znamená, že shodné jsou právě strany $AB \cong A'B'$; $AC \cong A'C'$; $BC \cong B'C'$. a úhly $\alpha = \alpha'$; $\beta = \beta'$; $\gamma = \gamma'$. Při zjišťování shodnosti trojúhelníků však není nutné dokazovat shodnost všech tří stran a zároveň všech tří úhlů. Stačí dokázat, že je splněna některá z postačujících podmínek shodnosti trojúhelníků. Ty jsou formulovány v tzv. **větách o shodnosti trojúhelníků**:

Dva trojúhelníky jsou shodné právě tehdy, když se shodují:

věta sss: ve všech třech stranách;
věta sus: ve dvou stranách a v úhlu jimi sevřeném;
věta Ssu: ve dvou stranách a v úhlu proti větší z nich;
věta usu: v jedné straně a úhlech k ní přilehlých.

Podobnost trojúhelníků: Dva trojúhelníky ΔABC; $\Delta A'B'C'$ se nazývají **podobné** (značíme $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$) právě tehdy, když existuje kladné reálné číslo k (**koeficient podobnosti**) takové, že $|AB| = k \cdot |A'B'|$; $|AC| = k \cdot |A'C'|$; $|BC| = k \cdot |B'C'|$.

Stejně jako v zápisu shodnosti i v zápisu podobnosti je třeba chápat vrcholy jako uspořádané trojice. Zápis nás tedy informuje nejen o podobnosti samotné, ale rovněž o tom, které vrcholy, strany a úhly si v této podobnosti „odpovídají".

Ani podobnost trojúhelníků nemusíme ověřovat vždy přímo z definice, i zde existují věty o podobnosti analogické větám o shodnosti:

Dva trojúhelníky jsou podobné právě tehdy, když:

věta uu: se shodují ve dvou úhlech;
věta sus: se shodují v poměru dvou stran a úhlu jimi sevřeném;
věta Ssu: se shodují v poměru dvou stran a úhlu proti větší z nich.

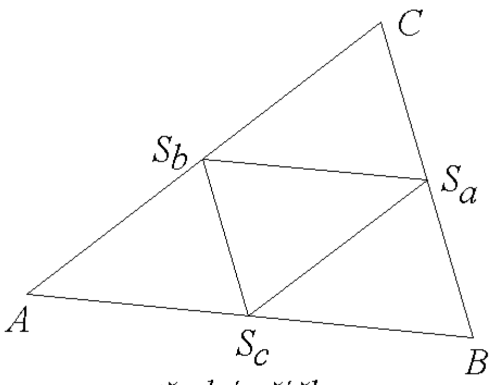
Příčky v trojúhelníku jsou spojnice významných bodů. Jejich názvy se používají opět v podstatě ve třech významech:

a) jako označení **přímky**, na které leží dva významné body;
b) jako označení **úsečky**, kde významné body jsou zároveň body krajními;
c) jako **velikost** úsečky z bodu b).

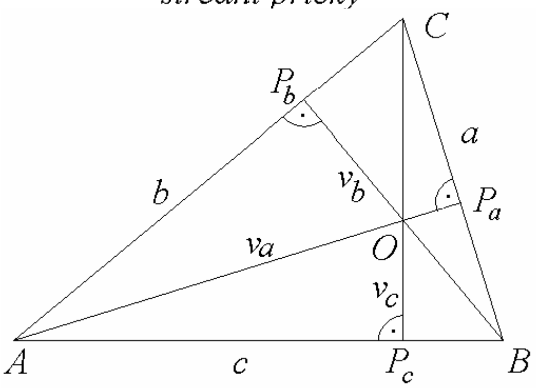
Většinou se chápou ve významu b), případný jiný význam je většinou patrný z kontextu (např. „trojúhelník má výšku 5 cm").

Střední příčka - spojnice středů dvou stran.

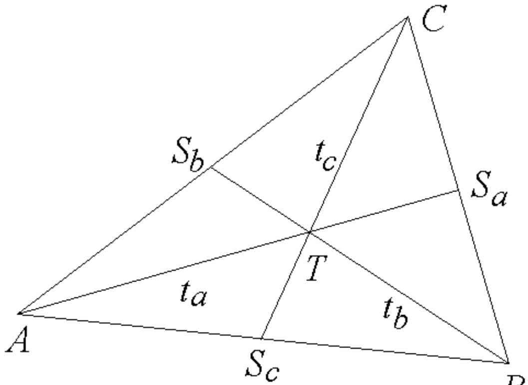
Trojúhelníky ΔABC a $\Delta S_B S_A C$ se shodují v poměru velikostí dvou stran $|AC| = 2 \cdot |S_B C|$; $|BC| = 2 \cdot |S_A C|$ a úhlu jimi sevřeném (úhel γ mají společný). Podle věty sus jsou tedy podobné. Znamená to, že i $|AB| = 2 \cdot |S_b S_a|$, a $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle S_a S_b C$. Tyto úhly jsou však



střední příčky



výšky



těžnice

souhlasné úhly mezi úsečkami AB; S_bS_a. Tyto úsečky musí být tedy rovnoběžné (viz poslední větu předchozí kapitoly). Totéž platí i pro zbývající příčky:

Každá střední příčka je rovnoběžná se stranou, kterou neprochází, a má poloviční délku.

Výška - kolmice spuštěná z vrcholu na protější stranu. Všechny výšky se protínají v jednom bodě (tzv. **ortocentrum**). V případě tupoúhlého trojúhelníka se tento bod nachází mimo trojúhelník. $\Delta ACP_a \sim \Delta BCP_b$ (věta uu – oba pravoúhlé, $\sphericalangle ACB$ společný). Tedy:

$$\frac{a}{v_b} = \frac{b}{v_a} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{v_b}{v_a} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{v_a}}{\frac{1}{v_b}} \Rightarrow a : b = \frac{1}{v_a} : \frac{1}{v_b}.$$

Podobně $b : c = \frac{1}{v_b} : \frac{1}{v_c}$.

Shrnuto: $\boxed{a : b : c = \frac{1}{v_a} : \frac{1}{v_b} : \frac{1}{v_c}}$

Těžnice - spojnice vrcholu a středu protější strany. Všechny těžnice se protínají v jednom bodě (tzv. **těžiště**). $\Delta ATC \sim \Delta S_aTS_c$ (věta uu - $S_cS_a \parallel AC$). $|AC| = 2 \cdot |S_cS_a| \Rightarrow |AT| = 2 \cdot |TS_a|$ (analogicky na zbývajících těžnicích).

Težiště dělí každou těžnici v poměru 2:1.

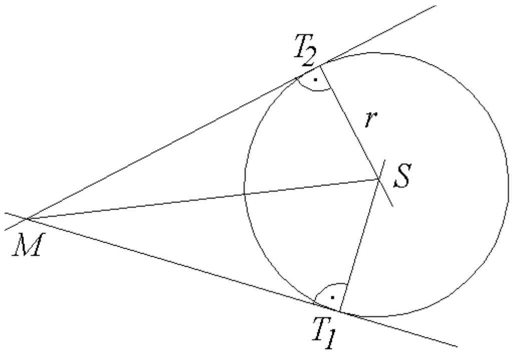
6.3 Kružnice a kruh

Kružnice: je množina bodů v rovině, které mají od daného pevného bodu (**středu**) stejnou vzdálenost (tzv. **poloměr kružnice**).

Poloměrem kružnice nazýváme zároveň každou úsečku s jedním krajním bodem ve středu kružnice a druhým na kružnici. Kružnici značíme nejčastěji k (v případě potřeby odlišujeme indexem). Kružnici nejčastěji zadáváme jejím středem a poloměrem. Je-li kružnice k určena středem S a poloměrem r, zapisujeme $k \equiv (S, r)$.
Kruhový oblouk: Dva body kružnice $A \in k$; $B \in k$ rozdělí tuto kružnici na dva kruhové oblouky (kruhový oblouk značíme $\overset{\frown}{AB}$).

Tětiva kružnice $k \equiv (S, r)$ je libovolná úsečka AB, kde $A, B \in k$. Prochází-li středem kružnice, nazýváme ji **průměrem kružnice.** Průměr je tedy nejdelší tětiva kužnice. Podobně jako u poloměru používáme i termín průměr také ve smyslu „velikost nejdelší tětivy“. Značíme d a platí $d = 2r$.

Kružnice a přímka: mají
a) **dva společné body** (takovou přímku nazýváme **sečnou**),
b) **jeden společný bod** (přímku nazýváme **tečnou**, společný bod je bod dotyku, říkáme také, že kružnice se dotýká přímky),
c) **žádný společný bod** (hovoříme o **vnější přímce**).

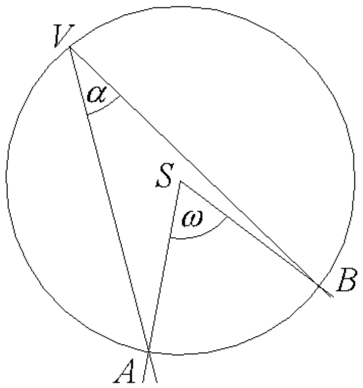


tečny z bodu ke kružnici

Pata kolmice vedené ze středu kružnice na sečnu AB je středem úsečky AB (tětivy).

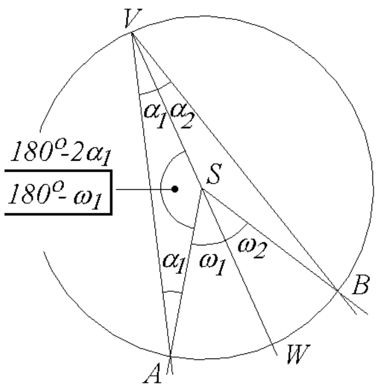
Tečna kružnice je kolmá k poloměru, který spojuje střed s bodem dotyku.

Bodem M ležícím vně kružnice k procházejí právě dvě tečny této kružnice. Délka úsečky MT se nazývá **délka tečny**.



středový a obvodový úhel

Úhel $\omega = \sphericalangle ASB$, jehož vrcholem je střed kružnice a ramena procházejí krajními body oblouku AB, nazýváme **středový úhel** příslušný tomuto oblouku. Každý úhel $\alpha = \sphericalangle AVB$, kde body A, V, B leží na kružnici, nazýváme **obvodovým úhlem** příslušným k oblouku AB, který v tomto úhlu leží.



k velikosti středového a obvodového úhlu

Uvažujme případ, že $S \in \sphericalangle AVB$ (viz připojený obrázek). Rozdělme středový i obvodový úhel přímkou spojující body V, S, druhý průsečík s kružnicí označme W. Dále označme $\sphericalangle AVS = \alpha_1$; $\sphericalangle BVS = \alpha_2$; $\sphericalangle ASW = \omega_1$; $\sphericalangle BSW = \omega_2$. Protože $|VS| = |AS| (= r)$, je $\sphericalangle VAS = \alpha_1$. Ze známého součtu úhlů v ΔVAS máme $|\sphericalangle ASV| = 180^0 - 2\alpha_1$. Úhel $\sphericalangle ASV$ je však také vedlejší k ω_1, je tedy $|\sphericalangle ASV| = 180^0 - \omega_1$. Znamená to, že

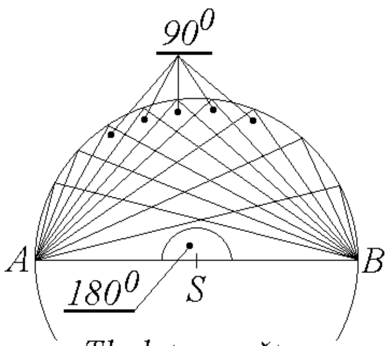
$$|\sphericalangle ASV| = 180^0 - \omega_1 = 180^0 - 2\alpha_1 \Rightarrow \omega_1 = 2\alpha_1.$$

Stejně lze ukázat, že $\omega_2 = 2\alpha_2$. Je tedy $\omega_1 + \omega_2 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 \Rightarrow \omega_1 + \omega_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2)$.
Avšak $\omega_1 + \omega_2 = \omega$; $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$, tj. $\boxed{\omega = 2\alpha}$.
V případě, že $S \notin \sphericalangle AVB$ je postup analogický a výsledek stejný.

Velikost středového úhlu je rovna dvojnásobku velikosti úhlu obvodového příslušného k témuž oblouku. Všechny obvodové úhly příslušné k témuž oblouku jsou shodné.

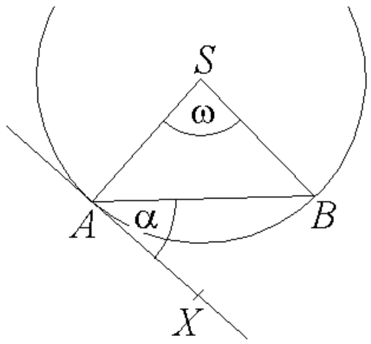
Speciálním případem je:

Thaletova věta: Obvodový úhel příslušný k půlkružnici je pravý (neboli všechny úhly nad průměrem kružnice jsou pravé).



Thaletova věta

Konvexní úhel $\sphericalangle ABX$, kde body AB leží na kružnici a X na tečně k této kružnici v bodě A (popř. B) se nazývá **úsekový úhel** příslušný k oblouku AB, který v tomto oblouku leží. Úsekový úhel je shodný se všemi obvodovými úhly příslušnými k témuž oblouku.

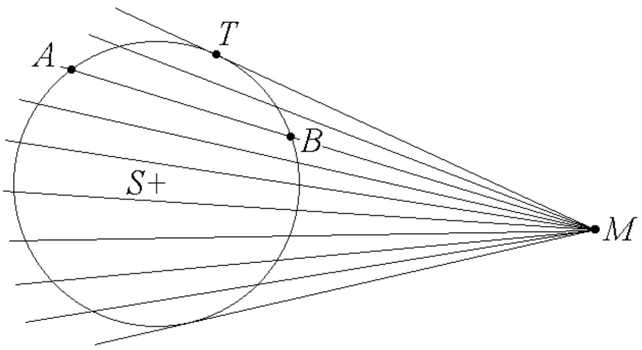


úsekový úhel

Mocnost bodu ke kružnici: Je dána kružnice $k \equiv (S, r)$ a libovolný bod M. Tímto bodem veďme sečnu (event. tečnu) p ke kružnici k a označme A, B průsečíky této přímky s kružnicí, tj. $A, B \in k \cap p$ (event. pro tečnu je $A \equiv B \equiv T$). Pro každou takto sestrojenou přímku procházející pevným bodem M je

$$\boxed{|MA| \cdot |MB| = konst = |MT|^2}.$$

Je-li bod M vně kružnice k, nazýváme tento součin mocností bodu ke kružnici, je-li uvnitř kružnice, je mocností číslo $-|MA| \cdot |MB|$. Mocnost bodů ležících na kružnici, je rovna nule.

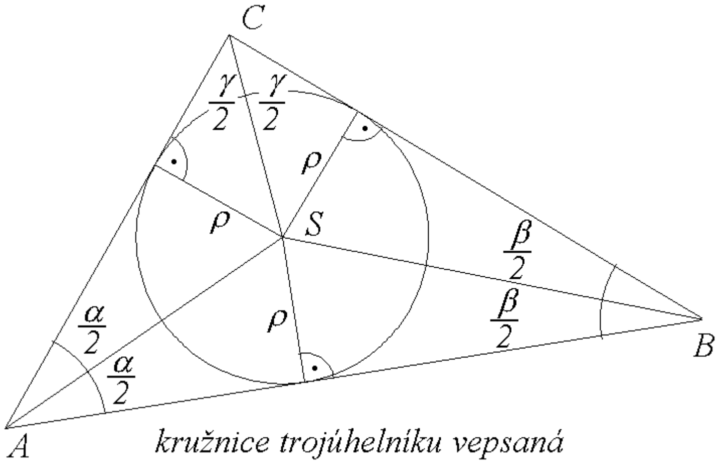


mocnost bodu ke kružnici

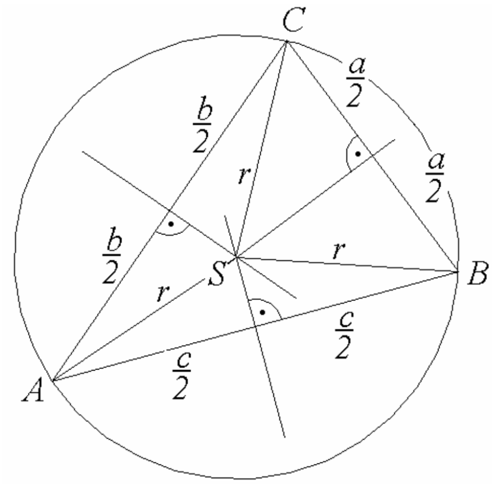
Kružnice a trojúhelník:

Kružnice trojúhelníku opsaná: je kružnice, která prochází všemi vrcholy trojúhelníka. Její střed leží v průsečíku os stran, poloměr značíme obvykle r.

Kružnice trojúhelníku vepsaná: je kružnice, která se dotýká všech stran trojúhelníka. Její střed leží v průsečíku os vnitřních úhlů, její poloměr značíme obvykle ρ.

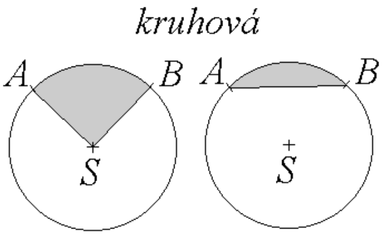


kružnice trojúhelníku vepsaná



kružnice trojúhelníku opsaná

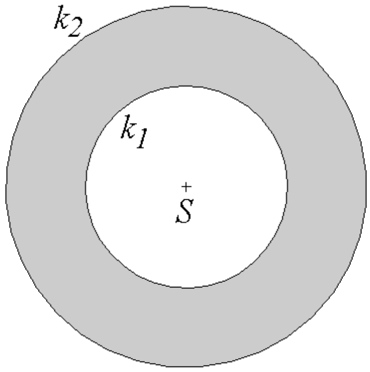
Kruh: je množina bodů v rovině, které mají od daného pevného bodu (středu) vzdálenost menší nebo rovnu danému kladnému číslu (tzv. poloměr kruhu). Poloměrem kruhu nazýváme zároveň každou úsečku s jedním krajním bodem ve středu kružnice a druhým na kružnici.



výseč *úseč*

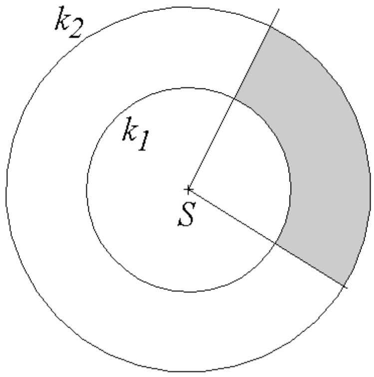
Kruh značíme nejčastěji K (v případě potřeby odlišujeme indexem). Kruh nejčastěji zadáváme jeho středem a poloměrem. Je-li kruh takto určen, zapisujeme $K \equiv (S, r)$. Množinu bodů, jejichž vzdálenost je rovna poloměru, nazýváme **hranicí kruhu** (popř. **hraniční kružnicí**), množina bodů, jejichž vzdálenost je menší, tvoří **vnitřní oblast** (**vnitřek**) kruhu, množina bodů, jejichž vzdálenost je větší, tvoří **vnější oblast** (**vnějšek**) kruhu.

Dva poloměry SA, SB rozdělí kruh na dvě **kruhové výseče**, tětiva AB na dvě **kruhové úseče**. Je-li AB průměr kruhu, nazýváme úseč půlkruhem.

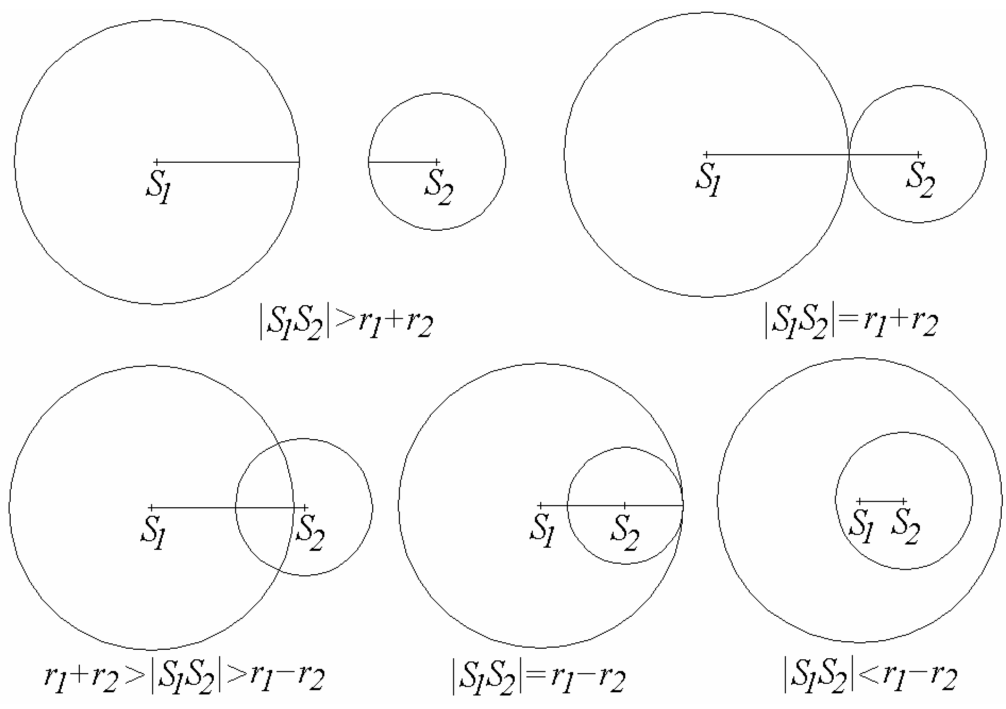


mezikruží

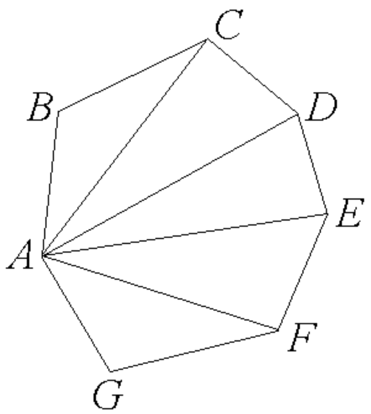
Dvě kružnice: Dvě kružnice o různých poloměrech mohou mít nejvýše dva společné body. Mají-li dvě kružnice společný střed, nazýváme je **soustředné**. Soustředné kružnice buď nemají žádný společný bod nebo mají všechny body společné (splynou). Dvě soustředné kružnice $k_1 \equiv (S; r_1)$; $k_2 \equiv (S; r_2)$; $r_2 > r_1$ určují tzv. **mezikruží**. Je to množina bodů, které mají od bodu S vzdálenost $r \in \langle r_1; r_2 \rangle$. Číslo $r_2 - r_1$ nazýváme **šířkou mezikruží**. Průnik středového úhlu a mezikruží se nazývá **výseč mezikruží**. Kružnice, které nemají společný střed, se nazývají **nesoustředné**. Dvě nesoustředné kružnice $k_1 \equiv (S; r_1)$; $k_2 \equiv (S; r_2)$; $r_2 > r_1$ mohou mít právě jednu z poloh znázorněných na připojeném obrázku.



výseč mezikruží



6.4 n-úhelníky

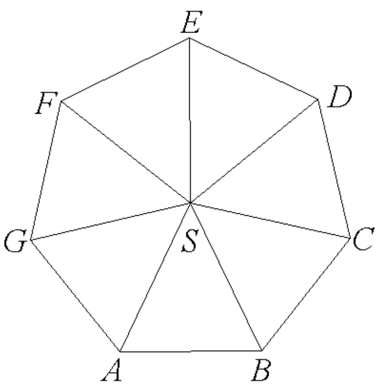


sedmiúhelník

n-úhelníkem rozumíme množinu bodů, kterou lze zapsat jako sjednocení $n-2$ trojúhelníků, z nichž vždy právě dva mají právě jednu společnou stranu (tzv. tvořicích trojúhelníků). n-úhelník nazýváme **konvexní** právě tehdy, když platí: leží-li body $A;B$ v mnohoúhelníku, pak v mnohoúhelníku leží celá úsečka AB.

Úhlopříčka je spojnice dvou vrcholů, které spolu nesousedí.

Součet vnitřních úhlů je součtem vnitřních úhlů všech tvořicích trojúhelníků, tj. $(n-2)\cdot 180^0$.

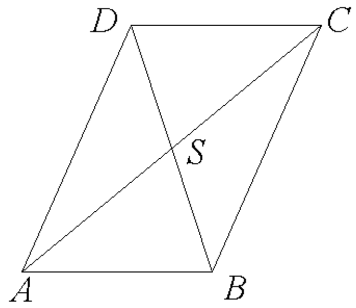


pravidelný sedmiúhelník

Pravidelný n-úhelník je n-úhelník, který lze zapsat jako sjednocení n rovnoramenných trojúhelníků, které mají společný hlavní vrchol a vždy právě dva mají právě jedno společné rameno. Speciálně místo pravidelný trojúhelník používáme název rovnostranný trojúhelník a místo pravidelný čtyřúhelník používáme název čtverec.

Speciální čtyřúhelníky:

Lichoběžník: je čtyřúhelník, který má právě jednu dvojici rovnoběžných stran. Strany, které rovnoběžné nejsou, nazýváme **ramena**. Lichoběžník, jehož ramena jsou shodná, se nazývá **rovnoramenný**.



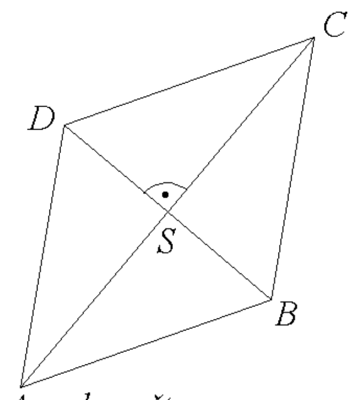
rovnoběžník

Rovnoběžník: je čtyřúhelník, který má právě dvě dvojice rovnoběžných stran. Na připojeném obrázku je $\Delta ACD \cong \Delta CAB$ podle věty usu (strana AC je společná, úhly k ní přilehlé jsou střídavé mezi rovnoběžkami). Znamená, to, že $AB \cong CD$; $BC \cong DA$. Dále tedy $\Delta ABS \cong \Delta CDS$ (opět věta usu, neboť $AB \cong CD$ a přilehlé úhly jsou opět střídavé úhly mezi rovnoběžkami). To znamená, že $AS \cong SC$; $BS \cong SD$. Shrnuto:

Protější strany v rovnoběžníku jsou shodné.
Úhlopříčky rovnoběžníka se půlí.

Obě tyto vlastnosti jsou podmínkami postačujícími, tj. platí věty:

Jestliže jsou protější strany čtyřúhelníka shodné, pak jde o **rovnoběžník.**
Jestliže se úhlopříčky čtyřúhelníka půlí, pak jde rovněž o **rovnoběžník**.



kosočtverec

Kosočtverec: je rovnoběžník, který má shodné i sousední strany. V tom případě je $\Delta ADS \cong \Delta CDS$ (usu), a proto $\sphericalangle ASD \cong \sphericalangle CSD$. Tyto úhly jsou ale úhly vedlejší, proto musejí být pravé: **Úhlopříčky v kosočtverci jsou na sebe kolmé.**

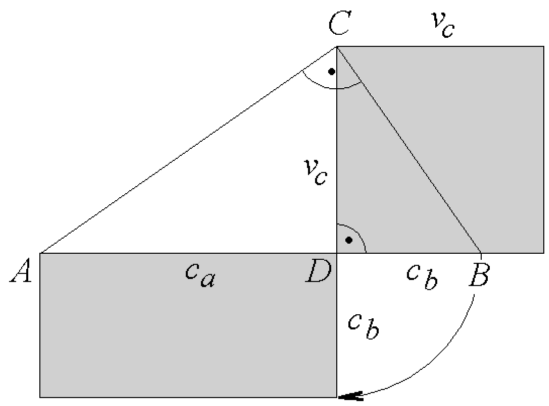
Kolmost úhlopříček však není postačující podmínkou k tomu, aby čtyřúhelník byl kosočtvercem (posuňte vrchol A po úhlopříčce AS !).

Obdélník: je rovnoběžník, jehož strany jsou na sebe kolmé

Čtverec: je obdélník se shodnými stranami (popř. kosočtverec s kolmými stranami).

Obecný rovnoběžník (tj. rovnoběžník, který není obdélníkem, čtvercem ani kosočtvercem) nazýváme **kosodélník**.

6. 5 Pravoúhlý trojúhelník



Euklidova věta o výšce

Euklidova věta o výšce: Na připojeném obrázku máme sestrojen pravoúhlý ΔABC a bod D je pata výšky v_c. Tato výška rozděluje tento trojúhelník na dva trojúhelníky $\Delta ACD \sim \Delta CBD$ podobné podle věty uu. Oba jsou totiž pravoúhlé a dále:

$$|\sphericalangle ACD| = 90^0 - |\sphericalangle DAC|$$

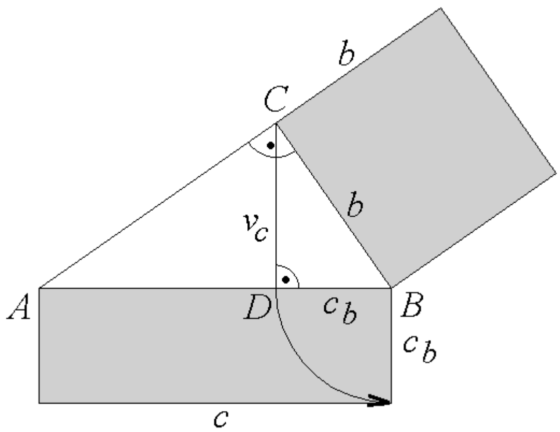
$$|\sphericalangle BCD| = 90^0 - |\sphericalangle ACD| =$$

$$= 90^0 - \left(90^0 - |\sphericalangle DAC|\right) = |\sphericalangle DAC|,$$

tedy $\sphericalangle BCD \cong \sphericalangle DAC$. Platí tedy:

$$\frac{v_c}{c_a} = \frac{c_b}{v_c} \Rightarrow \boxed{v_c^2 = c_a \cdot c_b}$$

Obsah čtverce sestrojeného nad výškou pravoúhlého trojúhelníka se rovná obsahu obdélníka sestrojeného z obou úseků přepony.

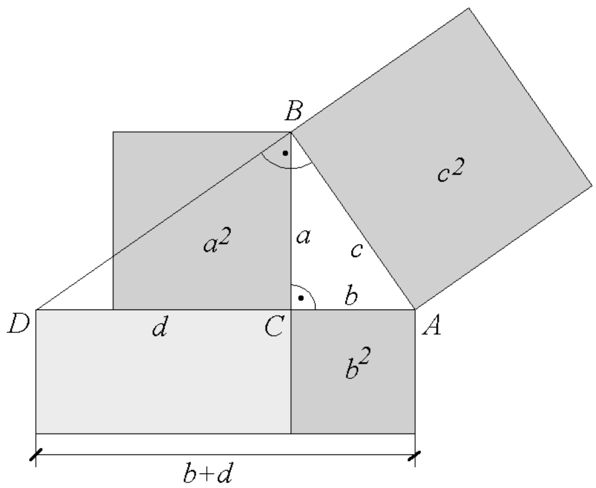


Euklidova věta o odvěsně

Euklidova věta o odvěsně: Na dalším obrázku je pravoúhlý ΔABC opět rozdělen výškou, tentokrát nás však zajímá podobnost $\Delta ABC \sim \Delta CBD$ (opět věta uu - oba jsou pravoúhlé a úhel β mají společný). Platí:

$$\frac{b}{c_b} = \frac{c}{b} \Rightarrow \boxed{b^2 = c \cdot c_b}$$

Obsah čtverce sestrojeného nad odvěsnou pravoúhlého trojúhelníka se rovná obsahu obdélníka sestrojeného z přepony a přilehlého úseku.



Pythagorova věta

Pythagorova věta: Tato asi nejznámější matematická věta je důsledkem dvou vět Euklidových. Zakresleme je do jednoho obrázku a použijme jiné označení: odvěsna a pravoúhlého ΔABC je nyní výškou pravoúhlého ΔADB. Úseky jeho přepony jsme označili b, d. Podle Euklidovy věty o výšce pro ΔADB je $a^2 = d \cdot b$.

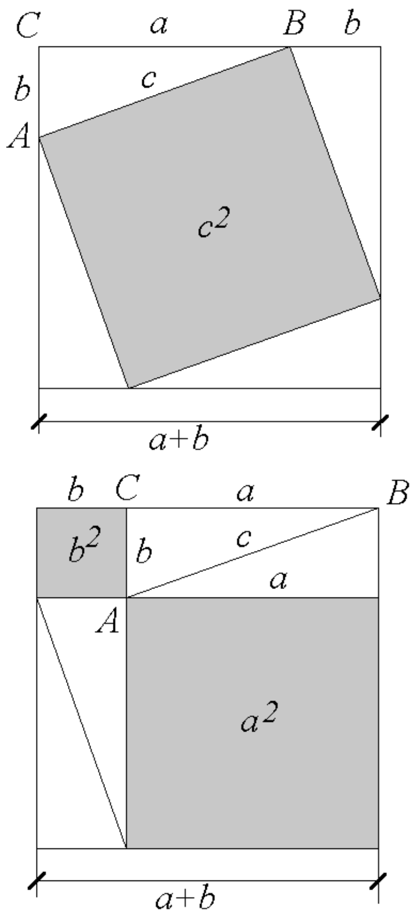
Délka přepony v ΔADB je $b+d$, přepona c v ΔABC je odvěsnou v ΔADB. Podle Euklidovy věty o odvěsně pro ΔADB tedy je

$$c^2 = (b+d)\cdot b \Rightarrow c^2 = b^2 + d\cdot b.$$

Protože však $d\cdot b = a^2$, dostáváme pro ΔABC:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}.$$

Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou pravoúhlého trojúhelníka se rovná součtu obsahů čtverců sestrojeného nad oběma jeho odvěsnami.



k Pythagorově větě

Pythagorovu větu lze také ilustrovat následujícím způsobem: Na připojených obrázcích jsou dva čtverce o straně $a+b$, ze kterých jsou „odebrány“ čtyři shodné pravoúhlé trojúhelníky ABC. Po odečtení jejich obsahů zbývají šedé útvary: nahoře čtverec sestrojený nad přeponou c, dole dva čtverce sestrojené nad odvěsnami $a;b$. Oba tyto útvary mají obsah $(a+b)^2 - 4\cdot S_{\Delta ABC}$, tedy **obsah stejný:**

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}.$$

Platí i věta obrácená, tj.: je-li $c^2 = a^2 + b^2$, pak je trojúhelník pravoúhlý.

Obrázky navíc geometricky ilustrují vzorečky pro druhou mocninu dvojčlenu: Spodní obrázek říká: Ke čtvercům o obsazích a^2; b^2 jsou přičteny dva obdélníky, každý o obsahu $a\cdot b$. Vše dohromady dává čtverec o straně $a+b$, tedy o obsahu $(a+b)^2$. Znamená to, že

$$a^2 + b^2 + 2\cdot a\cdot b = (a+b)^2.$$

Podobně lze „objevit“ vzorec

$$a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b = (a-b)^2$$

(pokuste se o to).

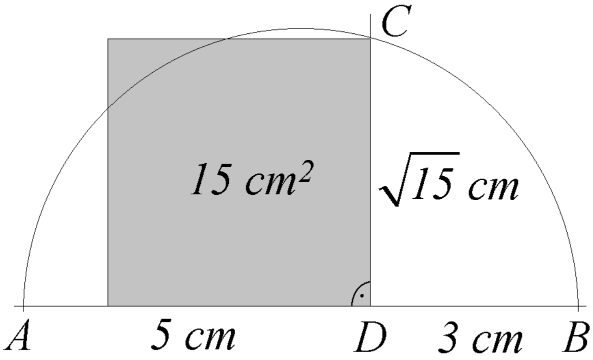
1. Příklad: Sestrojme čtverec, který má stejný obsah jako obdélník o stranách 5 cm; 3 cm.

Řešení:

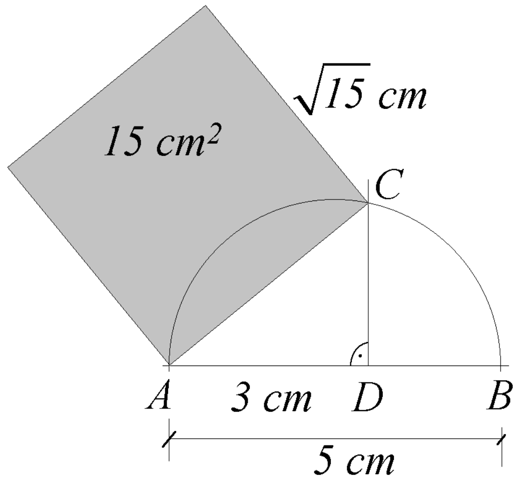
a) Pomocí Euklidovy věty o výšce: v pravoúhlém trojúhelníku platí $v_c^2 = c_a \cdot c_b$. Je tedy třeba setrojit pravoúhlý trojúhelník tak aby $c_a = 5\ cm$; $c_b = 3\ cm$. Jeho přepona bude tedy $c = c_a + c_b = 8\ cm$. Nad jeho výškou pak sestrojíme hledaný čtverec:

Konstrukce:

$c = AB = 8cm$
k -Thaletova kružnice nad AB
$D \in AB; |DA| = 5\ cm$
$v_c \perp AB; D \in v_c$
$C \in v_c \cap k$
DC je strana hledaného čtverce.



b) Pomocí Euklidovy věty o odvěsně: v pravoúhlém trojúhelníku platí $b^2 = c \cdot c_b$. Je tedy třeba sestrojit pravoúhlý trojúhelník tak aby $c = 5\ cm$; $c_b = 3\ cm$. Jeho odvěsna pak bude mít stejnou velikost jako strana hledaného čtverce:



Konstrukce:

$c = AB = 5cm$
k - Thaletova kružnice nad AB
$D \in AB; |DA| = 3\ cm$
$v_c \perp AB; D \in v_c$
$C \in v_c \cap k$
AC je strana hledaného čtverce.

2. Příklad: Sestrojme úsečku o velikosti $\sqrt{17}\ cm$.

Řešení: buď a) dle př. 1a: $|DA| = 17cm; |DB| = 1cm \Rightarrow |DC| = \sqrt{17}\ cm$

nebo b) dle př. 1b: $|DA| = 16cm$; $|DB| = 1cm \Rightarrow |AC| = \sqrt{17}\ cm$

3. Příklad: Sestrojme úsečku o velikosti $\sqrt{41}\ cm$.

Řešení: Je možno postupovat podle př. 2. V tomto případě je ovšem možno použít i větu Pythagorovu, neboť $\sqrt{41} = \sqrt{25+16} = \sqrt{5^2+4^2}$. Sestrojíme-li tedy pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami $5\ cm$ a $6\ cm$, jeho přepona bude mít velikost $\sqrt{41}\ cm$.

4. Příklad: Pravoúhlý trojúhelník má přeponu $c = 20\ cm$ a výšku $v_c = 8\ cm$. Jak velké úseky $c_a; c_b$ vytíná výška v_c na straně c?

Řešení: Podle Euklidovy věty o výšce je $v_c^2 = c_a \cdot c_b$, ze zadání je zřejmé, že $c = c_a + c_b = 20$. Řešíme tedy soustavu rovnic

$$\left.\begin{aligned} 8^2 &= c_a \cdot c_b \\ 20 &= c_a + c_b \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_a = 16; c_b = 4$$

5. Příklad: Obdélník $ABCD$ má velikost sousedních stran v poměru $3:4$, průměr opsané kružnice je $10\ cm$. Určeme velikosti stran.

Řešení: Průměr kružnice opsané obdélníku je roven délce úhlopříčky, která tento obdélník dělí na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky. Je tedy:

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$$
$$a^2 + b^2 = 10^2.$$

Řešením této soustavy dostaneme

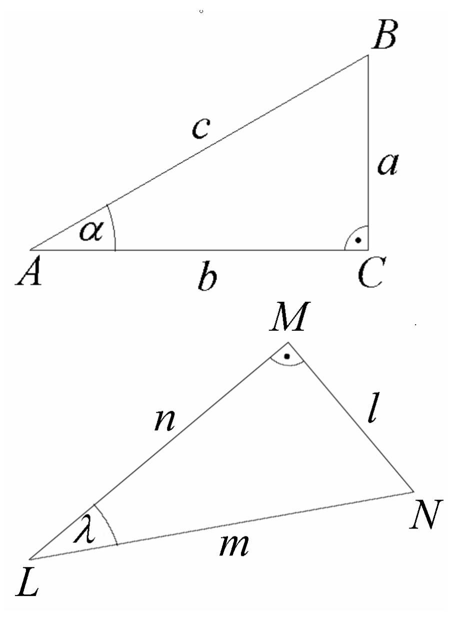
$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 b^2 + b^2 = 100$$
$$\frac{25}{16} b^2 = 100$$
$$b^2 = \frac{16}{25} \cdot 100$$
$$b = \frac{4}{5} \cdot 10 = 8\ cm \Rightarrow a = 6\ cm.$$

6. Příklad: Turista odměřil na mapě v měřítku 1 : 50 000 vzdálenost dvou míst $v(A, B) = 21,4\ cm$. Jaká je nejkratší vzdálenost obou míst, má-li bod A kótu 1 288 m a bod B kótu 704 m?

Řešení: Horizontální vzdálenost daných bodů je $21,4 \cdot 50\ 000 = 1\ 070\ 000$ cm =10,7 km, převýšení $1\ 288 - 704 = 584\ m = 0,584\ km$. Skutečná vzdálenost mezi těmito místy je tedy

$$d(A, B) = \sqrt{10,7^2 + 0,584^2} \approx 10,716\ km$$

Goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku: V kpt. 5.8 jsme zavedli goniometrické funkce pro obecný úhel. Tyto funkce mají široké uplatnění v trigonometrii – tj. při řešení problémů souvisejících s pravoúhlým i obecným trojúhelníkem. Je známo, že v pravoúhlém trojúhelníku ABC dle připojeného obrázku platí:



$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin\alpha = \dfrac{a}{c} & \cos\alpha = \dfrac{b}{c} \\ \mathrm{tg}\alpha = \dfrac{a}{b} & \mathrm{cotg}\alpha = \dfrac{b}{a} \end{array}}$$

Je však třeba si dobře uvědomit tyto vztahy i v trojúhelníku označeném a položeném jinak (viz další obrázek):

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin\lambda = \dfrac{l}{m} & \cos\lambda = \dfrac{n}{m} \\ \mathrm{tg}\lambda = \dfrac{l}{n} & \mathrm{cotg}\lambda = \dfrac{n}{l} \end{array}}$$

7. Příklad: Vypočtěme zbývající strany a úhly v pravoúhlém trojúhelníku: a) ΔABC: $c = 120$; $\alpha = 50^\circ 20'$ (pravý úhel při vrcholu C) b) ΔRST: $r = 240$, $\rho = 59^\circ 30'$ (pravý úhel při vrcholu T).

Řešení:

a) $\beta = 90^\circ - 50^\circ 20' = 39^\circ 40'$; $\sin\alpha = \dfrac{a}{c} \Rightarrow a = c\sin\alpha = 120 \cdot \sin 50^\circ 20' \approx 92{,}37$

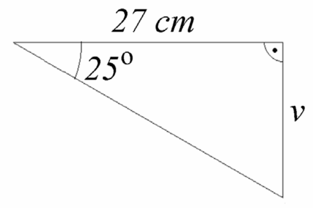
strana b: např $\cos\alpha = \dfrac{b}{c} \Rightarrow b = c\cos\alpha = 120 \cdot \cos 50^\circ 20' \approx 76{,}60$

nebo: $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{120^2 - 92{,}37^2} \approx 76{,}60$.

b) $\sigma = 90^\circ - 59^\circ 30' = 30^\circ 30'$; $\operatorname{tg}\sigma = \dfrac{s}{r} \Rightarrow s = r\operatorname{tg}\sigma = 240 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ 30' \approx 141{,}37$

$\cos\rho = \dfrac{s}{t} \Rightarrow t = \dfrac{s}{\cos\rho} = \dfrac{141{,}37}{\cos 59^\circ 30'} \approx 278{,}54$.

8. Příklad: Kolik schodů musí mít schodiště, je-li třeba sklonem 25° překonat výšku 3,27 m a schod má být široký 27 cm?



Řešení: Profil schodu je pravoúhlý trojúhelník dle obrázku. Zde je

$\operatorname{tg} 25^\circ = \dfrac{v}{27} \Rightarrow v = 27 \operatorname{tg} 25^\circ \approx 12{,}59$

a potřebný počet schodů je tedy $n = \dfrac{327}{12{,}59} \approx 26$.

Neřešené příklady:

1) Sestrojte úsečky o velikostech $\sqrt{8}$; $\sqrt{13}$; $\sqrt{22}$; $\sqrt{29}$.

2) Určete obsah obdélníka, jehož délka je $a = 84cm$ a jehož úhlopříčka je o $72cm$ delší než jeho šířka.

3) Určete vzdálenost dvou rovnoběžných tětiv v kružnici o poloměru $6cm$, je-li délka tětiv $6cm; 10cm$.

4) Štít střechy tvaru rovnoramenného trojúhelníka má šířku 12,8 m, spád střechy je 38°. Vypočtěte výšku štítu.

5) Trať má stoupání a) 12% b) 29 ‰. Jaký je úhel stoupání?

6) Z pozorovací věže 105 m nad hladinou moře je zaměřena loď v hloubkovém úhlu 1°49'. Jak daleko je loď od věže?

7) Sílu o velikosti $F = 100N$ rozložte na dvě navzájem kolmé složky $F_1; F_2$ tak, aby úhel mezi výslednicí a jednou složkou byl 43°52'.

8) Břemeno je zavěšeno ke stropu dvěma lany, která se stropem svírají úhel 45°. Jakými silami jsou lana namáhána, je-li tíha břemene $G = 200N$?

9) Ve východním větru o rychlosti $10 ms^{-1}$ letí k severu letadlo vlastní rychlostí $720 kmh^{-1}$. O jaký úhel se odchýlí od severního směru?

10) Na vodorovné louce na 50° severní šířky stojí osamělý smrk, který 21. března v pravé poledne vrhá stín dlouhý 12 m. Jak je smrk vysoký?

Výsledky:

1) Dle řeš. př. 1 a) $|AD| = 4 \wedge |DB| = 2 \Rightarrow |DC| = \sqrt{8}$; $|AD| = 13 \wedge |DB| = 1 \Rightarrow |DC| = \sqrt{13}$;
$|AD| = 11 \wedge |DB| = 2 \Rightarrow |DC| = \sqrt{22}$; $|AD| = 29 \wedge |DB| = 1 \Rightarrow |DC| = \sqrt{29}$

nebo

dle řeš. př. 1 b) $|AB| = 6 \wedge |AD| = 2 \Rightarrow |AC| = \sqrt{8}$; $|AB| = 13 \wedge |AD| = 1 \Rightarrow |AC| = \sqrt{13}$
$|AB| = 11 \wedge |AD| = 2 \Rightarrow |AC| = \sqrt{22}$; $|AB| = 29 \wedge |AD| = 1 \Rightarrow |AC| = \sqrt{29}$

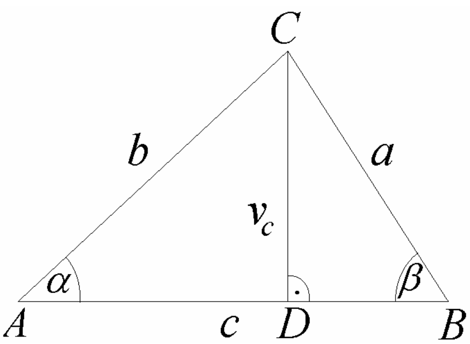
2) $1092 cm^2$ **3)** dvě řešení: $1.88 cm; 8.51 cm$. **4)** 5 m **5)** **a)** 6°51’ **b)** 1°51’ **6)** asi 3 310 m
7) $F_1 = 72.09 N; F_2 = 69.3 N$ **8)** $F_1 = F_2 \approx 141 N$ **9)** 2°52’ **10)** asi 10 m

6.6 Obecný trojúhelník

Při řešení obecného trojúhelníka používáme dvou důležitých vět:

Sinová věta: Mějme obecný trojúhelník ABC dle připojeného obrázku. Výška v_c ho rozdělí na dva pravoúhlé trojúhelníky ACD; BCD, ve kterých platí: $\sin\alpha = \frac{v_c}{b}$; $\sin\beta = \frac{v_c}{a}$, tedy

$$v_c = b\sin\alpha$$
$$v_c = a\sin\beta.$$



Odečtením těchto rovnic dostáváme

$$0 = b\sin\alpha - a\sin\beta$$

neboli

$$a\sin\beta = b\sin\alpha,$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

Zcela analogicky lze ukázat, že stejná rovnost platí i pro stranu c a úhel γ, a dále lze ukázat, že tento podíl je roven průměru kružnice trojúhelníku opsané. Platí tedy

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r}.$$

Tento vztah je opět třeba si uvědomit i v trojúhelníku označeném jinak, např:

$$\frac{k}{\sin\kappa} = \frac{m}{\sin\mu} = \frac{n}{\sin\nu} = 2r.$$

1. Příklad: Vypočtěme zbývající strany a úhly v trojúhelníku, je-li dáno: **a)** ΔABC: $c = 210$; $\alpha = 62°32'$; $\beta = 48°56'$; **b)** ΔRST: $s = 722$; $\rho = 49°25'$; $\tau = 108°40'$.

Řešení: a) $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 62°32' - 48°56' = 68°32'$

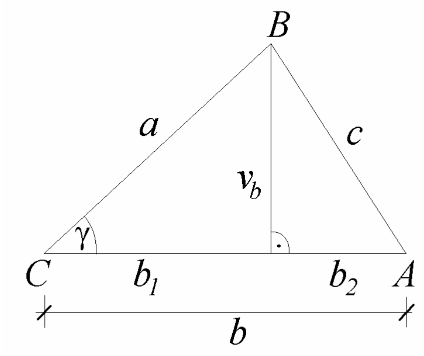
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{210\sin 62°32'}{\sin 68°32'} \approx 200,22$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{200,22\cdot\sin 48°56'}{\sin 62°32'} \approx 170,13$$

b) $\sigma = 180^o - \rho - \tau = 180^o - 49^o25' - 108^o40' = 21^o55'$

$$\frac{t}{\sin\tau} = \frac{s}{\sin\sigma} \Rightarrow t = \frac{s\sin\tau}{\sin\sigma} = \frac{722\cdot\sin 108^o40'}{\sin 21^o55'} \approx 1\,832{,}57$$

$$\frac{r}{\sin\rho} = \frac{s}{\sin\sigma} \Rightarrow r = \frac{s\sin\rho}{\sin\sigma} = \frac{722\cdot\sin 49^o25'}{\sin 21^o55'} \approx 1\,469{,}04$$



Kosinová věta: Uvažujme obecný trojúhelník ABC, v němž jsou známy strany $a;b$ a úhel γ, který tyto strany svírají (viz připojený obrázek). Naším úkolem je zjistit velikost strany c. Sestrojme výšku v_b, která rozdělí trojúhelník na dva pravoúhlé trojúhelníky a její pata rozdělí stranu b na úseky $b_1;b_2$. Platí:

$$\sin\gamma = \frac{v_b}{a} \Rightarrow v_b = a\sin\gamma\,,$$

$$\cos\gamma = \frac{b_1}{a} \Rightarrow b_1 = a\cos\gamma\,.$$

Podle Pythagorovy věty je:

$$c^2 = v_b^2 + b_2^2 = v_b^2 + (b - b_1)^2 = v_b^2 + b^2 - 2bb_1 + b_1^2\,.$$

Dosazením za v_b a b_1 z výše uvedených vztahů je:

$$c^2 = v_b^2 + b^2 - 2bb_1 + b_1^2 = a^2\sin^2\gamma + b^2 - 2ba\cos\gamma + a^2\cos^2\gamma = a^2\sin^2\gamma + a^2\cos^2\gamma + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Tedy: $c^2 = a^2\underbrace{(\sin^2\gamma + \cos^2\gamma)}_{1} + b^2 - 2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,.$

Poslední uvedený vztah vyjadřuje tzv. kosinovou větu pro stranu c. Při výpočtu strany a resp. b bychom dostali analogické vztahy. Shrnuto:

$$\boxed{\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \\ a^2 &= c^2 + b^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \end{aligned}}$$

Opět je důležité uvědomit si tyto vztahy i pro trojúhelník označený jinak:

$$m^2 = n^2 + r^2 - 2nr\cos\mu,$$

$$n^2 = m^2 + r^2 - 2mr\cos\nu,$$

$$r^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos\rho.$$

Kosinová věta je zobecněním věty Pythagorovy, neboť např. je-li v trojúhelníku ABC úhel $\gamma = 90^o = \frac{\pi}{2}$, pak je

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\frac{\pi}{2} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot 0 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2\,.$$

2. Příklad: Vypočtěme zbývající strany a úhly v trojúhelníku, je-li dáno: **a)** ΔABC : $a = 7$; $b = 4$; $\gamma = 38^\circ$ **b)** ΔKLM : $l = 32$; $m = 40$; $\kappa = 100^\circ 21'$.

Řešení: **a)** $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} = \sqrt{7^2 + 4^2 - 2\cdot 7\cdot 4\cdot\cos 38^\circ} \approx 4.57$,

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow \sin\beta = \frac{b\sin\gamma}{c} = \frac{4\cdot\sin 38^\circ}{4.57} \approx 0.5389 \Rightarrow \beta \approx 32^\circ 36',$$

$$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma = 180^\circ - 32^\circ 36' - 38^\circ = 109^\circ 24'.$$

b) $k = \sqrt{l^2 + m^2 - 2lm\cos\kappa} = \sqrt{32^2 + 40^2 - 2\cdot 32\cdot 40\cdot\cos 100^\circ 21'} \approx 55.53$,

$$\frac{k}{\sin\kappa} = \frac{m}{\sin\mu} \Rightarrow \sin\mu = \frac{m\sin\kappa}{k} = \frac{40\cdot\sin 100^\circ 21'}{55.53} \approx 0.7086 \Rightarrow \mu \approx 45^\circ 07',$$

$$\lambda = 180^\circ - \kappa - \mu = 180^\circ - 100^\circ 21' - 45^\circ 07' = 34^\circ 32'.$$

Větu sinovou používáme, je-li trojúhelník dán

a) dvěma úhly a jednou stranou (tj. podle věty usu);
b) dvěma stranami a úhlem proti jedné z nich. Je-li dán úhel proti větší straně, je trojúhelník zadán jednoznačně podle věty Ssu a úloha má právě jedno řešení. Není-li tomu tak, má úloha dvě řešení.

Větu kosinovou používáme, je-li trojúhelník dán

a) dvěma stranami a úhlem jimi sevřeným (tj. podle věty sus);
b) třemi stranami (tj. podle věty sss).

3. Příklad: Vypočtěme zbývající prvky (strany a úhly) v trojúhelníku ABC, je-li dáno: $a = 12,4$; $\beta = 32°40'$; $\gamma = 72°30'$.

Řešení: Trojúhelník je zadán podle věty usu – použijeme sinovou větu. Především dopočítáme zbývající úhel:

$$\alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 180° - (32°40' + 72°30') = 74°50'.$$

Dále je: $$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow c = \frac{a}{\sin\alpha}\cdot\sin\gamma = \frac{12,4\cdot\sin 72°30'}{\sin 74°50'} \approx 12,75,$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow b = \frac{a}{\sin\alpha}\cdot\sin\beta = \frac{12,4\cdot\sin 32°40'}{\sin 74°50'} \approx 6,93.$$

Je tedy: $\alpha = 74°50'$; $b \approx 6,93$; $c \approx 12,3$.

4. Příklad: Vypočtěme zbývající prvky (strany a úhly) v trojúhelníku ABC, je-li dáno: $a = 28,7$; $b = 19,5$; $\alpha = 53°20'$.

Řešení: Trojúhelník je opět zadán podle věty usu – použijeme sinovou větu.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow \sin\beta = \frac{b}{a}\cdot\sin\alpha = \frac{19,5\cdot\sin 53°20'}{28,7} \approx 0,545 \Rightarrow \beta \approx 33°$$

$$\gamma \approx 180° - (\alpha + \beta) = 180° - (53°20' + 33°) = 93°40'$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow c = \frac{a}{\sin\alpha}\cdot\sin\gamma = \frac{28,7\cdot\sin 93°40'}{\sin 53°20'} \approx 35,70.$$

5. Příklad: Vypočtěme zbývající prvky (strany a úhly) v trojúhelníku ABC, je-li dáno: $a = 34,8$; $b = 56,3$; $\gamma = 60°$.

Řešení: Trojúhelník je zadán podle věty sus – použijeme kosinovou větu:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} = \sqrt{34,8^2 + 56,3^2 - 2\cdot 34,8\cdot 56,3\cdot\cos 60°} \approx 49,2$$

Dále již lze použít větu sinovou:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{a}{c}\cdot\sin\gamma = \frac{34,8\cdot\sin 60°}{49,2} \approx 0,6126 \Rightarrow \alpha \approx 37°50'.$$

Konečně $\beta = 180° - (\alpha + \beta) \approx 180° - (37°50' + 60°) = 82°10'$.

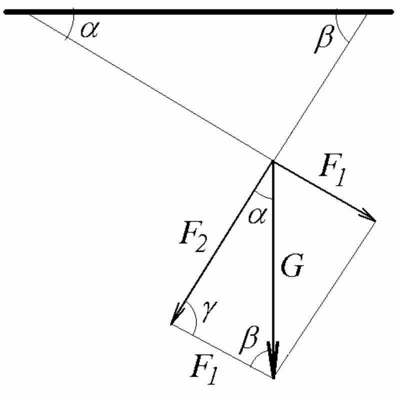
6. Příklad: Vypočtěme vnitřní úhly trojúhelníka ABC, jsou-li dány všechny jeho strany - $a = 32,4$; $b = 56,3$; $c = 72,8$.

Řešení:

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2cb\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{56,3^2 + 72,8^2 - 32,4^2}{2\cdot 56,3\cdot 72,8} \approx 0,9051 \Rightarrow \alpha \approx 25°10'.$$

Úhel β můžeme počítat stejným způsobem, lze již také použít sinovou větu: $\beta = 47^{\circ}37'$.
Úhel γ pak již lze jen dopočítat $\gamma = 180^{\circ} - (\alpha + \beta) = 107^{\circ}13'$.

7. Příklad: Těleso o hmotnosti $m = 2\ 000$ kg je zavěšeno dvěma lany různé délky na vodorovné traverze. Lana svírají s traverzou úhly $\alpha = 38^{\circ}26'$; $\beta = 49^{\circ}54'$. Určeme namáhání lan v tahu (počítejme s gravitačním zrachlením $g = 10\ ms^{-1}$).



Řešení:

$$G = mg = 2\ 000\cdot 10 = 20\ 000\ N$$

$$\gamma = 180^{\circ} - \alpha - \beta = 180^{\circ} - 38^{\circ}26' - 49^{\circ}54' = 91^{\circ}40'$$

Řešíme trojúhelník zadaný podle věty usu – použijeme sinovou větu:

$$\frac{G}{\sin\gamma} = \frac{F_1}{\sin\alpha} \Rightarrow F_1 = \frac{G\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{20\ 000\cdot\sin 38^{\circ}26'}{\sin 91^{\circ}40'} \approx 12\ 437\ N$$

$$\frac{G}{\sin\gamma} = \frac{F_2}{\sin\beta} \Rightarrow F_2 = \frac{G\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{20\ 000\cdot\sin 49^{\circ}54'}{\sin 91^{\circ}40'} \approx 15\ 305\ N$$

Neřešené úlohy:

1) V ΔABC je **a)** $a = 16; b = 25; c = 36$ **b)** $a = 5; b = 6; c = 7$. Vypočtěte velikosti vnitřních úhlů.

2) V ΔABC je **a)** $a = 165; \beta = 40^{\circ}50'; \gamma = 69^{\circ}20'$ **b)** $b = 722; \alpha = 49^{\circ}25'; \gamma = 108^{\circ}48'$. Vypočtěte zbývající strany a úhly.

3) Na vrcholu kopce stojí rozhledna vysoká 35 m. Z údolí vidíme patu rozhledny pod úhlem 28° a vrchol rozhledny pod úhlem 31°. Jak vysoko je vrchol kopce nad údolím?

4) Obce A, B jsou spojeny s obcí C přímými cestami, které svírají úhel $63^{\circ}20'$ a jsou dlouhé $2\ 003\ m$, resp. $1\ 593\ m$. Jak dlouhá je přímá cesta z A do B?

5) Dvě nepřístupná místa P,Q jsou pozorována z míst A,B, jejichž vzdálenost je $|AB| = 2\ 000\ m$. Byly změřeny úhly $|\sphericalangle QAB| = 52^{\circ}40'$; $|\sphericalangle PBA| = 42^{\circ}01'$; $|\sphericalangle PAB| = 86^{\circ}40'$; $|\sphericalangle QBA| = 81^{\circ}15'$. Určete vzdálenost $|PQ|$ (předpokládáme, že všechny body leží ve stejné rovině).

6) Z bodu A je vyslán světelný paprsek, který má po odrazu od rovinného zrcadla dospět do bodu B. Vzdálenost bodů A,B je $|AB| = 360\ cm$, vzdálenost bodu A, resp. bodu B od zrcadla je $a = 70\ cm$ resp. $b = 180\ cm$. Určete úhel dopadu paprsku na zrcadlo.

7) Světelný paprsek dopadá na skleněnou tabuli pod úhlem $59^{\circ}17'$. Určete tloušťku tabule, jestliže se po průchodu tabulí paprsek posunul o $20,9\ mm$ (index lomu skla je $n = 1,53$).

8) Síly o velikostech $F_1 = 42N; F_2 = 35N$ působí na stejný bod a svírají úhel $77^{\circ}12'$. Jaká je velikost výsledné síly?

9) Letadlo letí ve výšce $3\ 500\ m$ k pozorovatelně. Při dvou měřeních bylo z pozorovatelny vidět pod úhly 25°, resp. 48°. Jakou vzdálenost urazilo letadlo mezi oběma měřeními?

10) Po rampě se sklonem $18^{\circ}40'$ je třeba vytáhnout těleso tíhy $280\ N$. Jak velká síla je k tomu potřeba a jak velká bude tlaková síla na rampu (tření zanedbejte)?

Výsledky:
1) a) $\alpha \approx 22^{\circ}20'; \beta \approx 36^{\circ}25'; \gamma \approx 121^{\circ}15'$ **b)** $\alpha \approx 44^{\circ}25'; \beta \approx 57^{\circ}07'; \gamma \approx 78^{\circ}28'$
2) a) $\alpha \approx 69^{\circ}50'; b \approx 114,9; c \approx 164,5$ **b)** $\beta \approx 21^{\circ}55'; a \approx 1\ 469; c \approx 1\ 833$ **3)** 269 m
4) $2\ 122\ m$ **5)** $1\ 633\ m$ **6)** $53^{\circ}54'$ **7)** $20,8\ mm$ **8)** $F \approx 62,35N$ **9)** asi $4\ 354\ m$ **10)** $89,62\ N$; $265,27\ N$

6.7 Obvody a obsahy geometrických obrazců

Geometrickým obrazcem (dále jen **obrazcem**) rozumíme množinu bodů v rovině ohraničenou uzavřenou křivkou (**hranicí obrazce**), která do této množiny rovněž patří.

Hranicí obrazce může být např. sjednocení n úseček (u n-úhelníka), kružnice (u kruhu), sjednocení kruhového oblouku a úsečky (kruhová úseč), sjednocení kruhového oblouku a dvou úsečkek (kruhová výseč) apod. Hranici obrazce může tvořit i více křivek - např. sjednocení dvou kružnic u mezikruží.

Obvodem obrazce (značíme o) rozumíme délku jeho hranice.

Obsahem obrazce (značíme S) je **nezáporné** reálné **číslo**, které má následující vlastnosti:

1) Obsahy shodných obrazců jsou si rovny.
2) Je-li obrazec $\mathbf{O}$ sjednocením obrazců $\mathbf{O}_1$; $\mathbf{O}_2$, jejichž průnikem je nejvýše jejich hranice, je obsah obrazce $\mathbf{O}$ roven součtu obsahů obrazců $\mathbf{O}_1$; $\mathbf{O}_2$.
3) Obsah čtverce o straně $a = 1$ $(m,\ cm,...)$ je $S = 1$ $(m^2,\ cm^2,...)$.

Přehled vzorců pro výpočet obvodů a obsahů nejdůležitějších obrazců:

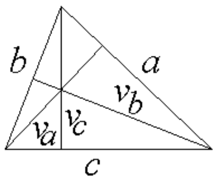
trojúhelník

$o = a + b + c$

$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot v_a$

$= \frac{1}{2} \cdot b \cdot v_b$

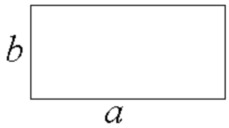
$= \frac{1}{2} \cdot c \cdot v_c$



obdélník

$o = 2(a + b)$

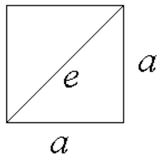
$S = a \cdot b$



čtverec

$o = 4a$

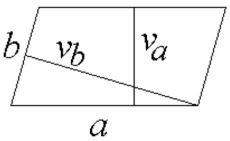
$S = a^2 = \frac{1}{2} e^2$



kosodélník

$o = 2(a + b)$

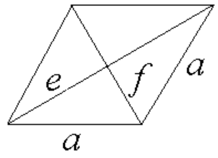
$S = a \cdot v_a = b \cdot v_b$



kosočtverec

$o = 4a$

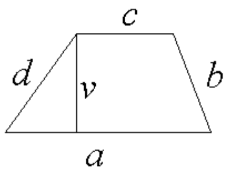
$S = a \cdot v = \frac{1}{2} e \cdot f$



lichoběžník

$o = a + b + c + d$

$S = \frac{1}{2}(a + c) \cdot v$

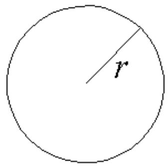


kruh

$d = 2r$

$o = 2\pi r = \pi d$

$S = \pi r^2 = \frac{1}{4} \pi d^2$

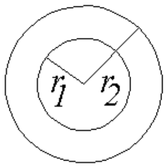


mezikruží

$d_1 = 2r_1; d_2 = 2r_2$

$o = 2\pi(r_1 + r_2) = \pi(d_1 + d_2)$

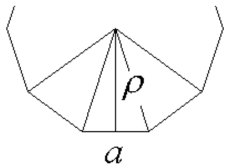
$S = \pi(r_2^2 - r_1^2) = \frac{1}{4} \pi(d_2^2 - d_1^2)$



pravidelný n-úhelník

$o = n \cdot a$

$S = \frac{1}{2} \cdot n \cdot a \cdot \rho = \frac{1}{2} \cdot o \cdot \rho$



1. Příklad: Obdélníková zahrada má obvod 130 m a obsah 1000 m^2. Vypočtěme její rozměry.
Řešení: Úloha vede na řešení soustavy dvou rovnic

$$2(a + b) = 130$$
$$ab = 1000$$

Z první rovnice je $a = \frac{130 - 2b}{2}$. Dosazením do druhé rovnice obdržíme:

$$\frac{130 - 2b}{2} \cdot b = 1000$$

$$2b^2 - 130b + 2000 = 0$$

$$b_{1,2} = \frac{130 \pm \sqrt{130^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2000}}{2 \cdot 2} = \frac{130 \pm \sqrt{900}}{4} = \frac{130 \pm 30}{4} = \begin{cases} 40 \\ 25 \end{cases}$$

Dosazením do kterékoli rovnice dostaneme $[a_1; b_1] = [25; 40]$; $[a_2; b_2] = [40; 25]$. Zahrada má tedy rozměry 25×40 m.

2. Příklad: Jak se změní obsah obdélníka o rozměrech $a; b$; jestliže

a) zvětšíme stranu a dvakrát a stranu b třikrát?

b) zmenšíme-li oba rozměry o 5%?

Řešení:

a) Obsah původního obdélníka je $S_0 = a \cdot b$; obsah zvětšeného $S = 2a \cdot 3b = 6 \cdot a \cdot b = 6 \cdot S_0$, tj. obsah se zvětší šestkrát.

b) Obsah původního obdélníka je $S_0 = a \cdot b$; obsah zmenšeného $S = 0.95a \cdot 0.95b = 0{,}9025 \cdot a \cdot b \approx 0.9 \cdot S_0$, tj. obsah obdélníka se zmenší asi o 10%.

3. Příklad: Strany trojúhelníka jsou v poměru 3:5:7, jeho obvod je 45 cm. Určeme délky stran.

Řešení: Jestliže jsou strany trojúhelníka v daném poměru, znamená to, že existuje číslo k takové, že $a = 3k$; $b = 5k$; $c = 7k$. Je-li $O = a + b + c = 3k + 5k + 7k = 15k = 45$, pak $k = 3$, a tedy $a = 3k = 9$ cm; $b = 5k = 15$ cm; $c = 7k = 21$ cm.

4. Příklad: Cestovatel vykonal po rovníku cestu kolem světa. Nad jeho hlavou tutéž cestu (jeden oblet) absolvoval satelit ve výšce 500 km. O kolik kilometrů byla jeho cesta delší? Řešme pro Zemi a (hypoteticky) pro Měsíc, předpokládejme kruhové dráhy.

Řešení:

Pro Zemi: poloměr Země je $R_Z = 6\ 378\ km$, dráha cestovatele je tedy

$$d_1 = 2\pi R_Z = 2 \cdot 6\ 378 \cdot \pi \approx 40\ 074\ km,$$

poloměr dráhy satelitu je $R = R_Z + 500 = 6\ 878\ km$, dráha satelitu je tedy

$$d_2 = 2\pi R = 2 \cdot 6\ 878 \cdot \pi \approx 43\ 216\ km,$$

rozdíl činí $\Delta d = d_2 - d_1 = 43\ 216 - 40\ 074 = 3\ 142\ km$.

Pro Měsíc: poloměr Měsíce je $R_M = 1\ 738\ km$, dráha cestovatele je tedy

$$d_1 = 2\pi R_M = 2 \cdot 1\ 738 \cdot \pi \approx 10\ 920\ km,$$

poloměr dráhy satelitu je $R = R_M + 500 = 2\ 238\ km$, dráha satelitu je tedy

$$d_2 = 2\pi R_M = 2 \cdot 2\ 238 \cdot \pi \approx 14\ 062\ km,$$

rozdíl činí $\Delta d = d_2 - d_1 = 14\ 062 - 10\ 920 = 3\ 142\ km$,

(tedy přesně tolik, kolik pro Zemi).

Vysvětlení tohoto zdánlivého paradoxu není nijak složité – řešme úlohu obecně: Nechť poloměr planety je R, výška dráhy satelitu h. Délka rovníku je pak $d_1 = 2\pi R$, délka dráhy satelitu $d_2 = 2\pi(R + h)$ a rozdíl $\Delta d = d_2 - d_1 = 2\pi(R + h) - 2\pi R = 2\pi R + 2\pi h - 2\pi R = 2\pi h$ vůbec nezávisí na poloměru planety, ale pouze na výšce satelitu nad ní.

Neřešené úlohy

1) Vypočtěte obvod a obsah čtverce, jehož úhlopříčka má délku 10 cm.

2) Vypočtěte obsah rovnostranného trojúhelníka, jehož obvod je 72 cm.

3) Kolo těžní věže má průměr 1,5 m. O kolik metrů se spustí klec výtahu, otočí-li se kolo pětadvacetkrát?

4. Příčný průřez náspu železniční trati má tvar rovnoramenného lichoběžníka se základnami $|AB| = 15\ m$; $|CD| = 10{,}5\ m$ a rameny $|BC| = |AD| = 5\ m$. Vypočtěme obsah průřezu.

5) Kruhový stůl o poloměru 80 cm vysoký rovněž 80 cm je pokryt čtvercovým ubrusem o délce strany 1,2 m tak, že střed stolu se kryje se středem ubrusu. Jak vysoko nad zemí jsou rohy ubrusu?

6) Délky základen lichoběžníku jsou v poměru 3:2, délka střední příčky je 5 m. Určete délky základen.

7) Běžec proběhl třikrát kruhovou dráhu a uběhl dva kilometry. Jaký je poloměr dráhy?

8) Antický matematik a filosof Erathostenes z Kireny si všiml, že v den jarní rovnodennosti dopadá Slunce v Asuánu v poledne do hlubokých studní až na hladinu vody. O rok později v tentýž den v Alexandrii zjistil, že se sluneční paprsky do studní nedostanou, protože se odchylují od kolmice o 7°. Cesta z Asuánu do Alexandrie byla dlouhá 700 km a vedla prakticky stále na sever. Z těchto skutečností usoudil, že Země je kulatá a dokonce vypočítal přibližnou délku zemského poledníku. Dokážete to také?

Výsledky:
1) $o = 20\sqrt{2}cm$ **;** $S = 50cm^2$ **; 2)** $S = 288\sqrt{3}cm^2$ **3)** $\approx 118m$ **4)** $\approx 57.4m^2$ **5)** $39.15cm$ **.**
6) $6m;4m$ **7)** $106.16m$ **8)** Cesta představuje kruhový oblouk příslušný středovému úhlu 7°. Pro délku d celého poledníku je tedy $d : 700 = 360 : 7 \Rightarrow d = (700 \cdot 360)/7 = 36\ 000\ km$.

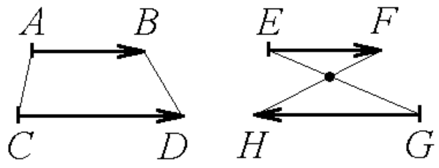
6.8 Zobrazení v rovině

V kapitole 1.3 jsme shrnuli nejrůznější typy zobrazení množin. Zopakujme, že zobrazení z množiny S do množiny Z je jistá množina F uspořádaných dvojic $[x;y]$, kde $x \in S;\ y \in Z$, přičemž každému prvku $x \in S$ je tímto způsobem přiřazen nejvýše jeden prvek $y \in Z$. Zobrazení množin zapisujeme $F : S \to Z$, zobrazení jednotlivých prvků zapisujeme většinou rovněž $F : x \to y$ (místo $[x;y] \in F$). Je možné rovněž hovořit o zobrazení v množině, a sice v případě, že $S = Z$. V tom případě hovoříme o zobrazení v množině S, zapisujeme $F : S \to S$. Tímto zobrazením se nyní budeme zabývat s tím, že množina S bude množina všech bodů roviny. Hovoříme pak o zobrazení v rovině, které budeme většinou zadávat „postupem konstrukce“, který každému bodu roviny přiřadí bod ležící opět v této rovině. Většinou se bude jednat o zobrazení (jedné a téže) roviny α na (tutéž) rovinu α. Abychom v zápisech rozlišili body od zobrazení, budeme zobrazení zapisovat psacími písmeny. Zápis $\mathcal{F} : X \to X'$ tedy znamená, že zobrazení $\mathcal{F}$ zobrazuje bod X do bodu X'. Bod X se nazývá vzor, X' obraz.

Obraz útvaru U: Obrazem útvaru U v zobrazení $\mathcal{F}$ rozumíme množinu U' všech obrazů bodů útvaru U.
Samodružný bod zobrazení $\mathcal{F}$ je každý bod X, který v zobrazení $\mathcal{F}$ splyne se svým obrazem, tj. $X \equiv X'$.
Samodružný útvar zobrazení $\mathcal{F}$ je každý útvar U, který v zobrazení $\mathcal{F}$ splyne se svým obrazem, tj. $U \equiv U'$.
Identita je zobrazení, v němž je každý bod samodružný.

Orientovanou úsečkou v rovině rozumíme úsečku, kde jeden krajní bod je označen jako **počáteční** a druhý jako **koncový**. Orientovanou úsečku AB značíme $\overrightarrow{AB}$.

Toto označení se používá i pro polopřímku AB. Z kontextu bude však vždy zřejmé, který útvar máme na mysli a nebude proto hrozit nedorozumění.



souhlasně a nesouhlasně orientované úsečky

Rovnoběžné orientované úsečky $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ mohou být orientovány buď souhlasně nebo nesouhlasně. Leží-li všechny body na téže přímce, jsou úsečky $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}$ orientovány souhlasně právě tehdy, když polopřímka $\overrightarrow{AB}$ je podmnožinou polopřímky $\overrightarrow{CD}$ nebo naopak $\overrightarrow{CD}$ je podmnožinou $\overrightarrow{AB}$. Neleží-li všechny body na téže přímce, pak jsou úsečky $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}$ orientovány souhlasně právě tehdy, když úsečky $AC; BD$ nemají společný bod. Souhlasně či nesouhlasně orientované úsečky nazýváme též úsečkami souhlasně či nesouhlasně rovnoběžnými.

Shodné zobrazení (shodnost): je zobrazení, v němž obrazem každé úsečky AB je úsečka $A'B'$ shodná s úsečkou AB.

V každém shodném zobrazení platí:
- obrazem přímky AB je přímka $A'B'$, obrazem rovnoběžných přímek jsou rovnoběžné přímky;
- obrazem polopřímky $\overrightarrow{AB}$ je polopřímka $\overrightarrow{A'B'}$, obrazem opačných polopřímek jsou opačné polopřímky;
- obrazem poloroviny $\overrightarrow{pA}$ je polorovina $\overrightarrow{p'A'}$, obrazem opačných polorovin jsou opačné poloroviny;
- obrazem úhlu $\sphericalangle AVB$ je úhel $\sphericalangle A'V'B'$ shodný s úhlem $\sphericalangle AVB$;
- obrazem útvaru U je útvar U' shodný s útvarem U.

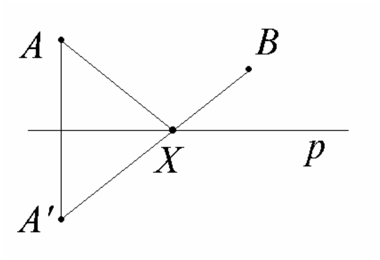
Osová souměrnost: Je dána přímka o. Osová souměrnost s osou o je zobrazení $\mathcal{O}(o)$, které přiřazuje: a) každému bodu $X \notin o$ bod X' tak, že $XX' \perp o$ a střed úsečky XX' leží na o.
b) každému bodu $Y \in o$ bod $Y' \equiv Y$.

Přímku o nazýváme osa souměrnosti, o bodech X, X' říkáme, že jsou souměrně sdružené podle osy o.

Množinou všech samodružných bodů je osa souměrnosti. Samodružnou přímkou je osa souměrnosti a každá přímka k ní kolmá. Obrazem přímky rovnoběžné s osou je přímka rovnoběžná s osou.Obrazem přímky q, která není rovnoběžná s osou ani k ní kolmá, je přímka q', která se s přímkou q protíná na ose o.

1. Příklad: Je dána přímka p a body A, B ležící v téže polorovině s hraniční přímkou p. Určeme bod $X \in p$ tak aby součet $|AX| + |BX|$ byl co nejmenší.

Řešení: Jedná se o konstrukční úlohu, jejíž řešení by vždy mělo obsahovat:
- **rozbor úlohy**, kde jsou zachyceny vlastnosti sestrojovaných útvarů, které umožňují jejich konstrukci, součástí rozboru je náčrtek, kde jsou tyto vlastnosti zachyceny;
- **konstrukci**, tj. **popis či postup** při sestrojení útvaru, tento postup je důležitější, než samotné **vyrýsování obrázku** pravítkem a kružítkem;
- **diskusi**, která stanoví počet řešení úlohy.



Rozbor: Nejkratší spojnicí dvou bodů je úsečka. Kdyby body A, B ležely v opačných polorovinách, byl by řešením bod $X \in AB \cap p$. Leží-li ve stejné polorovině, převedeme úlohu na předchozí případ konstrukcí bodu A' (popř. B') osově souměrného s bodem A (resp. B) podle přímky p. Hledaným bodem je pak průsečík přímky p s úsečkou $A'B$ (resp. AB').

Konstrukce: a) $A' : \mathcal{O}(p) : A \to A'$,

b) $X \in A'B \cap p$.

Diskuse: Úloha má jedno řešení.

Středová souměrnost: Je dán bod S. Středová souměrnost se středem S je zobrazení $\mathcal{S}(S)$, které přiřazuje:

a) každému bodu $X \neq S$ bod X' tak, že S je středem úsečky XX';

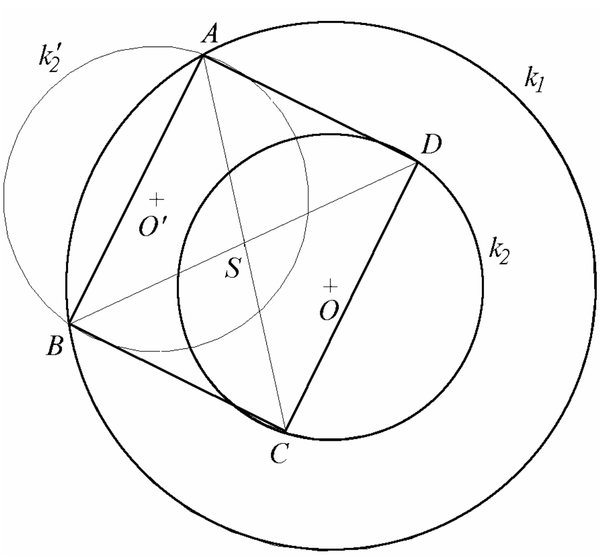
b) bodu S bod $S \equiv S'$.

Bod S nazýváme středem souměrnosti, o bodech X, X' říkáme, že jsou souměrně sdružené podle středu S.

Jediným samodružným bodem je bod S, samodružnou přímkou je každá přímka, která prochází středem souměrnosti.

Středová souměrnost je jednoznačně určena svým středem. Je však jednoznačně určena také dvojicí souměrně sdružených bodů X, X'. Střed souměrnosti v tom případě najdeme jako střed úsečky XX'.

2. Příklad: Jsou dány dvě soustředné kružnice $k_1(O, r_1)$; $k_2(O, r_2)$; $r_1 > r_2$. A bod S uvnitř k_2. Sestrojte obdélník $ABCD$ tak, že $A; B \in k_1$; $C; D \in k_2$ a bod S je jeho středem.



Rozbor: Obdélník je středově souměrný podle svého středu, $\mathcal{S}(S) : A \to C; B \to D$. V této středové souměrnosti je $\mathcal{S}(S) : k_2 \to k_2'$. Protože dle zadání je $C; D \in k_2$, musí být $A; B \in k_2'$. Protože však dle zadání je $A; B \in k_1$, je $A; B \in k_1 \cap k_2'$.

Konstrukce: a) kružnice $k_2' : \mathcal{S}(S) : k_2 \to k_2'$,

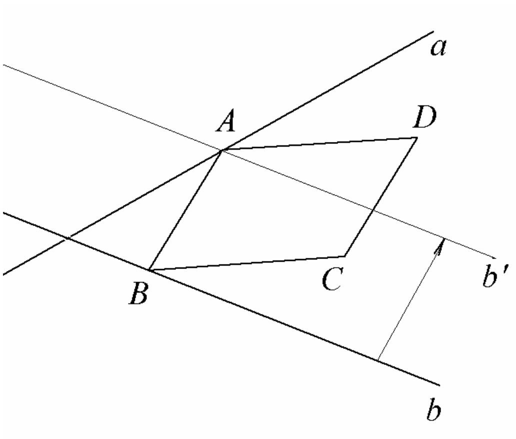
b) $A, B \in k_1 \cap k_2'$,

c) obdélník $ABCD$.

Diskuse: Úloha má jedno řešení.

Posunutí (translace): Je dána orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$. Posunutí (translace) je zobrazení $\mathcal{T}(\overrightarrow{AB})$, které každému bodu X přiřadí bod X'tak, že orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{XX'}$ jsou shodné, rovnoběžné a souhlasně orientované.

Délka orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ udává délku posunutí, její směr určuje směr posunutí. Posunutí určené nulovou orientovanou úsečkou je identita. Posunutí určené nenulovou orientovanou úsečkou nemá samodružné body. Obrazem přímky p různoběžné s úsečkou $\overrightarrow{AB}$ určující posunutí je přímka p' rovnoběžná s p a různá od této přímky. Obrazem přímky p rovnoběžné s úsečkou $\overrightarrow{AB}$ určující posunutí je přímka $p' \equiv p$ (přímka p je samodružná).



3. Příklad: Jsou dány dvě různoběžné přímky a, b a úsečka CD. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$ tak, aby $A \in a; B \in b$.

Rozbor: $\mathcal{T}(\overrightarrow{CD}): B \to A; b \to b'$. Protože $B \in b$ a $B \to A$, je $A \in b'$. Dle zadání je $A \in a$, tedy $A \in a \cap b'$.

Konstrukce: a) přímka $a': \mathcal{T}(\overrightarrow{CD}): b \to b'$,
b) $A \in a \cap b'$,
c) $\square ABCD$.

Diskuse: Úloha má jedno řešení.

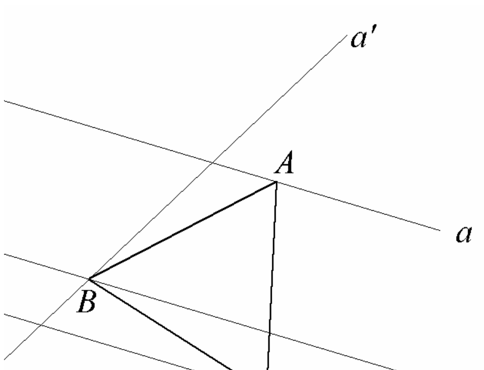
Otočení (rotace): Je dán orientovaný úhel se základní velikostí φ a bod S. Otočení (rotace) je zobrazení $\mathcal{R}(S;\varphi)$, které přiřazuje

a) každému bodu $X \neq S$ bod X' tak, že $|SX| = |SX'|$ a orientovaný úhel $\sphericalangle XSX'$ má základní velikost φ;
b) bodu S bod $S' \equiv S$.

Bod S nazýváme středem otočení (rotace), orientovaný úhel pak úhlem otočení. V otočení o nenulový úhel je střed rotace zároveň jediným samodružným bodem. Otočení o 180^0 je středová souměrnost. V otočení o 180^0 je samodružná každá přímka procházející středem rotace. Otočení o jiný úhel nemá samodružné přímky. Samodružnými útvary jsou kružnice a kruhy se středem ve středu otáčení.

Lze poměrně snadno dokázat, že osová souměrnost, středová souměrnost, translace a rotace jsou shodná zobrazení. Ve všech důkazech se studuje zobrazení úsečky a používají se věty o shodnosti trojúhelníků. Důkazy vynecháme a ponecháváme je zájemcům jako cvičení.

4. Příklad: Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC, jehož vrcholy leží na třech rovnoběžných přímkách a, b, c.



Rozbor: Vnitřní úhly rovnostranného trojúhelníka mají velikost 60^o. V otočení o tento úhel, jehož středem je např. vrchol C, je obrazem bodu A bod B, obrazem přímky a přímka a'. Je tedy $B \in a'$. Protože dle zadání je $B \in b$, musí být $B \in b \cap a'$.

Konstrukce: a) libovolný $C \in c$
b) $\mathcal{R}(C, 60^o): a \to a'$
c) $B \in b \cap a'$
d) ΔABC

Diskuse: Po zvolení bodu $C \in c$ lze bod A získat dvojím způsobem – otočením přímky a kolem C o 60^o (tj. proti směru chodu hodinových ručiček) nebo též o -60^o (po směru chodu hodinových ručiček). Dva trojúhelníky, které takto vzniknou, jsou však shodné (navíc symetrické podle kolmice procházející bodem C). Takové situace za dvě řešení nepovažujeme. Úloha má jedno řešení.

Podobné zobrazení (podobnost): je zobrazení, v němž obrazem každé úsečky AB je úsečka $A'B'$, jejíž velikost je k násobkem velikosti úsečky AB ($k > 0$).

V každém podobném zobrazení platí:

- obrazem přímky AB je přímka $A'B'$, obrazem rovnoběžných přímek jsou rovnoběžné přímky;
- obrazem polopřímky $\overrightarrow{AB}$ je polopřímka $\overrightarrow{A'B'}$, obrazem opačných polopřímek jsou opačné polopřímky;
- obrazem poloroviny $\overrightarrow{pA}$ je polorovina $\overrightarrow{p'A'}$, obrazem opačných polorovin jsou opačné poloroviny;
- obrazem úhlu $\sphericalangle AVB$ je úhel $\sphericalangle A'V'B'$ shodný s úhlem $\sphericalangle AVB$.

Jsou-li U, U' dva útvary a existuje-li podobné zobrazení $\mathscr{I} : U \to U'$, které zobrazuje útvar U na útvar U', nazýváme útvary U, U' podobné (speciálním případem jsou podobné trojúhelníky).

Stejnolehlost (homotetie): Je dán bod S a reálné číslo k, $k \neq 0$. Stejnolehlost (homotetie) je zobrazení $\mathscr{H}(S,k)$, které přiřazuje:

a) každému bodu $X \neq S$ bod X' tak, že $|SX| = |k| \cdot |SX'|$, pro $k > 0$ leží X' na polopřímkce $\overrightarrow{SX}$, pro $k < 0$ na polopřímce k ní opačné;
b) bodu S bod $S \equiv S'$

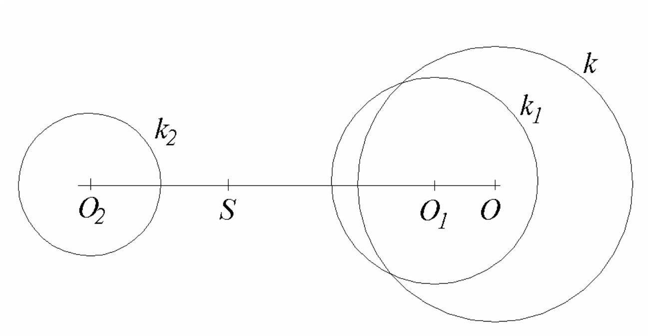
Stejnolehlost $\mathscr{H}(S,k)$ je podobnost s koeficientem $|k|$. Pro $k = 1$ je identitou, pro $k = -1$ rotací kolem S o 180^0 (i středovou souměrností se středem v bodě S). Pro $k \neq 1$ je jediným samodružným bodem střed S. Samodružnou přímkou je každá přímka, která prochází středem stejnolehlosti.

Pro stejnolehlost platí:

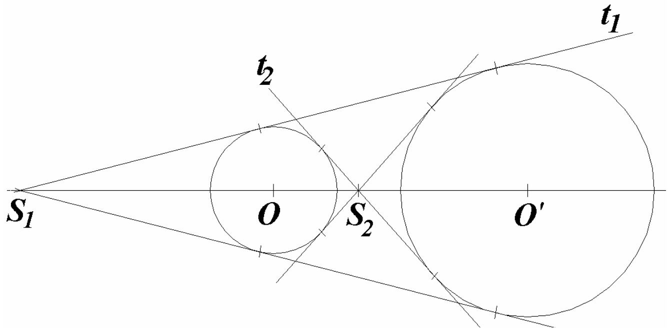
- přímka a její obraz jsou rovnoběžné;
- orientovaná úsečka a její obraz jsou pro $k > 0$ souhlasně rovnoběžné, pro $k < 0$ nesouhlasně rovnoběžné;
- poměr délek obrazu úsečky a jejího vzoru se rovná $|k|$;
- obrazem úhlu je úhel shodný.

Stejnolehlost kružnic: leží-li bod X na kružnici $k(O,r)$, je $|XO| = r$. Pro obrazy $X';O'$ bodů $X;O$ ve stejnolehlosti $\mathscr{H}(S,\lambda)$ pak platí $|X'O'| = \lambda|XO| = \lambda r$. Platí tedy:

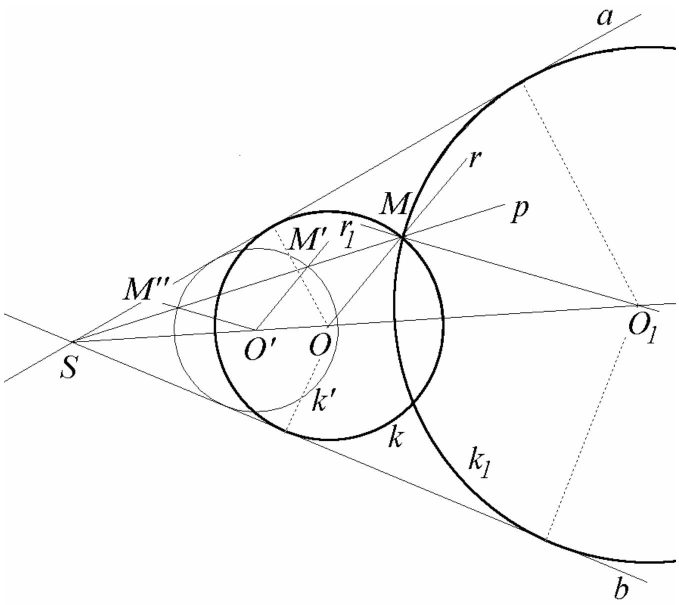
Obrazem kružnice $k(O,r)$ ve stejnolehlosti $\mathscr{H}(S,\lambda)$ je kružnice $k'(O',|\lambda| \cdot r)$, přitom bod O' je obrazem bodu O.



Na připojeném obrázku vidíme kružnici $k(O,r)$ a její obraz ve stejnolehlosti s kladným a záporným koeficientem. Je-li střed stejnolehlosti ve středu kružnice, zobrazí se kružnice na kružnici soustřednou.

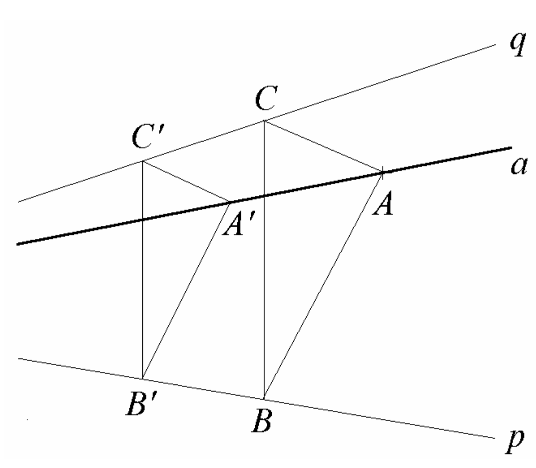


Jsou-li dány dvě kružnice s různými poloměry, pak existují právě dvě stejnolehlosti, které zobrazí jednu kružnici na druhou. Jeden z možných případů vidíme na připojeném obrázku. Zde bod S_1 se nazývá vnější střed stejnolehlosti, bod S_2 pak střed vnitřní. V případě, že kružnice mají stejný poloměr, pak existuje jediná stejnolehlost, která zobrazuje jednu kružnici na druhou – je to středová souměrnost. Společná tečna dvou kružnic (pokud existuje) je buď rovnoběžná se spojnicí středů nebo prochází středem stejnolehlosti, která zobrazuje jednu kružnici na druhou. Tečny procházející vnějším středem se nazývají vnější společné tečny, tečny, které procházejí vnitřním středem jsou pak vnitřní společné tečny.



5. Příklad: Jsou dány dvě různoběžky a,b a bod $M \notin a,b$. Sestrojme kružnici, která se dotýká přímek a,b a prochází bodem M.

Rozbor: Hledaná kružnice k se středem O je stejnolehlá s libovolnou kružnicí k' se středem O', která se dotýká obou přímek, středem stejnolehlosti je bod $S \in a \cap b$. Daný bod $M \in k$ je stejnolehlý s bodem $M' \in k'$, přičemž $O'M' \parallel OM$.



Konstrukce:

a) libovolná $k' \equiv (O', r')$, která se dotýká přímek a,b,

b) přímka o: osa úhlu s rameny a,b,

c) přímka $p \equiv SM$,

d) bod $M' \in k' \cap p$,

e) přímka r: $M \in r$; $r \parallel O'M'$,

f) $O \in r \cap o$.

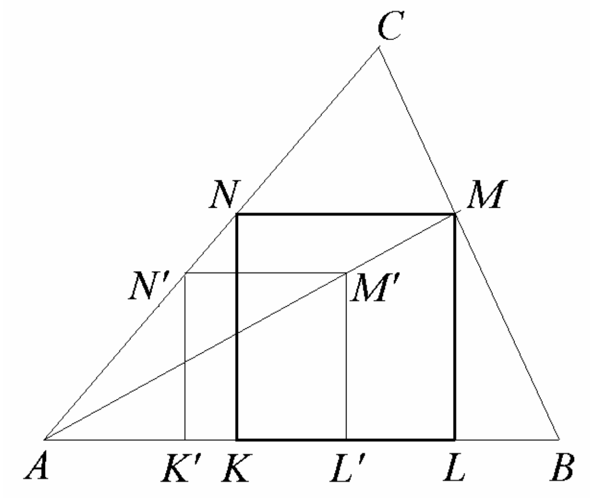
Diskuse: Úloha má dvě řešení.

6. Příklad: Sestrojme přímku a, která prochází daným bodem A a nepřístupným průsečíkem přímek p, q.

Rozbor: Nepřístupný průsečík přímek p, q je střed stejnolehlosti. Je-li U libovolný útvar, kde $A \in U$ a sestrojíme-li k němu stejnolehlý útvar U' se stejnolehlým bodem A', pak hledaná přímka je určena body $A; A'$.

Konstrukce:
a) libovolný trojúhelník $U \equiv ABC : B \in p; C \in q$,
b) libovolný trojúhelník $U' \equiv A'B'C' : B' \in p; C' \in q; AB \parallel A'B'; BC \parallel B'C'; CA \parallel C'A'$,
c) $a \equiv AA'$.

Diskuse: Úloha má jedno řešení.



7. Příklad: Do daného ostroúhlého trojúhelníka ABC vepište čtverec $KLMN$ tak, aby $KL \subset AB; M \in BC; N \in AC$.

Řešení již stručně:

Rozbor: použijeme stejnolehlosti se středem v bodě A.

Konstrukce:
a) libovolný čtverec $K'L'M'N'$: $K'L' \subset AB$; $N' \in AC$,
b) hledaný bod M : $M \in BC \cap AM'$,
c) $\square KLMN$.

Diskuse: Úloha má jedno řešení.

Neřešené úlohy:

1) Zvolte libovolný ΔABC, sestrojte jeho těžiště T a kružnici k trojúhelníku opsanou. Zobrazte kružnici k ve stejnolehlosti $\mathscr{H}(T, -0.5)$. Kterými body obvodu trojúhelníka ABC kružnice k' prochází?

2) Je dán čtverec $ABCD$, $|AB| = 5cm$ a bod M uvnitř čtverce, $M \in BD$; $|MB| = 2cm$. Sestrojte všechny úsečky XY s krajními body na hranici čtverce tak, že $|MX| : |MY| = 4 : 3$.

3) Sestrojte ΔABC, je-li dáno:
a) $a : c = 4 : 7; \beta = 45°; t_c = 4{,}5\ cm$; b) $a : b : c = 7 : 4 : 5; v_b = 4\ cm$;
c) $\alpha = 45°; \beta = 60°; r = 5\ cm$ (poloměr kružnice opsané).

4) Do daného rovnoběžníka $KLMN$ vepište čtverec $ABCD$ tak, aby $A \in KL$; $B \in LM$; $C \in MN$; $D \in KN$.

5) Do kružnice $k(S;r)$ je vepsán rovnostranný ΔABC. Sestrojte jeho obraz $\Delta A'B'C'$ v otočení $\mathscr{R}(S;60°)$. Určete vnitřní úhly takto vzniklého dvanáctiúhelníka (šesticípé hvězdy)

6) Je dán bod C, přímka p ($|Cp| = 2cm$), kružnice $k(S;3cm)$ ($|Sp| = 4cm$, body C,S leží v téže polorovině s hraniční přímkou p. Sestrojte všechny pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky ABC s pravým úhlem při vrcholu C tak, aby $A \in p; B \in k$.

7) Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jsou-li dány délky obou jeho základen a,c a obou jeho úhlopříček e,f.

8) Do čtverce $ABCD$ vepište rovnostranný ΔAYZ tak, aby $Y \in BC$, $Z \in CD$.

9) Sestrojte ΔABC, jsou-li dány velikosti všech tří jeho těžnic.

10) Sestrojte ΔABC, je-li dán jeho obvod o a vnitřní úhly α, β.

11) Na obdélníkovém kulečníkovém stole $ABCD$ leží bílá a černá koule. Bílá koule má trefit černou po dvojím odrazu od mantinelu. Kudy je třeba bílou kouli poslat?

12) Jak velké rovinné zrcadlo člověk potřebuje, aby v něm viděl celou svoji postavu?

Výsledky:

1) Středy stran AB, BC, CA. **2)** Užijte $\mathscr{H}\left(M;-\frac{3}{4}\right)$, případně $\mathscr{H}\left(M;-\frac{4}{3}\right)$.

4) Užijte $\mathscr{R}\left(S;\pm\frac{\pi}{2}\right)$, kde S je střed rovnoběžníka **5)** $60°; 240°$ **6)** Užijte $\mathscr{R}\left(C;\frac{\pi}{2}\right)$.

7) Užijte $\mathscr{T}\left(\overrightarrow{CD}\right)$ **8)** Užijte $\mathscr{O}(AC)$ **9)** Hledaný ΔABC spolu se všemi jeho těžnicemi zobrazte ve středové souměrnosti $\mathscr{S}(S_c)$, kde S_c je střed strany c. Těžiště T trojúhelníka ABC se zobrazí do těžiště T' trojúhelníka $A'B'C'$. Nyní je možno sestrojit $\Delta TT'B$, jehož strany jsou rovny dvěma třetinám daných těžnic. Konstrukce ΔABC je pak již zřejmá.

10) Sestrojte ΔEDC, kde $|ED| = o$, $\sphericalangle EDC = \frac{\alpha}{2}$, $\sphericalangle DEC = \frac{\beta}{2}$. Dále sestrojte osy $o_1; o_2$ úseček DC, EC; pak $A \in o_1 \cap DE$; $B \in o_2 \cap DE$ **11)** Užijte dvou osových souměrností s osami ve dvou stranách stolu . **12)** Polovina výšky postavy.